NOT: Tüm polinomlar, tüm rasyonel fonksiyonlar, trigonometrik fonksiyonlar, $x^{m/n} = \sqrt[n]{x^m}$ şeklindeki fonksiyonlar, mutlak değer fonksiyonu tanımlı oldukları her yerde sürekli olan fonksiyonlardır.

Teorem:

Eğer f ve g fonksiyonlarının her ikisi de bir a noktasını içeren bir aralık üzerinde tanımlı ve her ikisi de a noktasında sürekli ise o zaman

- $f \mp g$
- $k \cdot f \quad (k \in \mathbb{R})$
- $f \cdot g$
- $\dfrac{f}{g}$ ($g(a) \neq 0$ olması koşuluyla
- $[f]^{1/n}$ (n çift iken $f(a) > 0$ olması koşuluyla)

Sürekli fonksiyonların bileşkesi

Eğer $f[g(x)]$ a noktasını içeren bir aralık üzerinde tanımlı ve eğer f L'de sürekli ve de $\lim\limits_{x \to a} g(x) = L$ ise o zaman

$$\lim_{x \to a} f[g(x)] = f\left[\lim_{x \to a} g(x)\right] = f(L)\text{'dir.}$$

Not: Tüm polinomlar, tüm rasyonel fonksiyonlar, trigonometrik fonksiyonlar, $x^{m/n} = \sqrt[n]{x^m}$ şeklindeki fonksiyonlar, mutlak değer fonksiyonu tanımlı oldukları her yerde sürekli olan fonksiyonlardır.

Teorem:

Eğer f ve g fonksiyonlarının her ikisi de bir a noktasını içeren bir aralık üzerinde tanımlı ve her ikisi de a noktasında sürekli iseler o zaman

- $f \mp g$
- $k \cdot f \quad (k \in \mathbb{R})$
- $f \cdot g$
- $\dfrac{f}{g}$ ($g(a) \neq 0$ olması koşuluyla
- $[f]^{1/n}$ (n çift iken $f(a) > 0$ olması koşuluyla)

Sürekli fonksiyonların bileşkesi

Eğer $f[g(x)]$ a noktasını içeren bir aralık üzerinde tanımlı ve eğer f L'de sürekli ve de $\lim\limits_{x \to a} g(x) = L$ ise o zaman

$$\lim_{x \to a} f[g(x)] = f\left[\lim_{x \to a} g(x)\right] = f(L) \text{'dir.}$$

Özel olarak $g(x)$ a'da sürekli ise ($\lim_{x\to a} g(x) = g(a)$ ise) o zaman

$$\lim_{x\to a} f[g(x)] = f[g(a)]$$

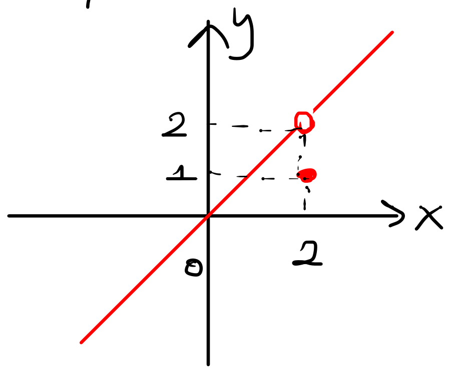
dır.

$\lim_{x\to\infty} \sin x \to$ limit yok.

Süreksizlik

Ör/ $g(x) = \begin{cases} x & x \neq 2 \\ 1 & x = 2 \end{cases}$ fonksiyonunun $x=2$'de sürekliliğini inceleyiniz.

$g(2) = 1$ $\quad \lim_{x\to 2^{\mp}} x = 2 \neq g(2)$ süreksiz. kaldırılabilir süreksiz.



Ör/ $f(x) = \begin{cases} \dfrac{1-\cos x}{x^2} & x \neq 0 \\ 2 & x = 0 \end{cases}$ fonksiyonu $x=0$'da sürekli midir?

$f(0) = 2$

$$\lim_{x\to 0^{\mp}} \frac{1-\cos x}{x^2} = \lim_{x\to 0^{\mp}} \frac{2\sin^2\frac{x}{2}}{x^2} = \lim_{x\to 0^{\mp}} \frac{\sin\frac{x}{2}\cdot\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}\cdot\frac{x}{2}\cdot 2} = \frac{1}{2} \neq 2 = f(0)$$

kaldırılabilir süreksiz.

Ör/ $f(x) = \begin{cases} 1-x^2 & |x| \leq 1 \\ \dfrac{1}{|x|} & |x| > 1 \end{cases}$ fonksiyonunun $x=-1$ ve $x=1$'de sürekliliğini inceleyiniz.

$$= \begin{cases} \dfrac{-1}{x} & x < -1 \\ 1-x^2 & -1 \leq x \leq 1 \\ \dfrac{1}{x} & x > 1 \end{cases}$$

$f(-1) = 0$

$$\left.\begin{aligned} \lim_{x \to -1^-} f(x) &= \lim_{x \to -1^-} \left(-\frac{1}{x}\right) = 1 \\ \lim_{x \to -1^+} f(x) &= \lim_{x \to -1^+} (1-x^2) = 0 \end{aligned}\right] \neq$$

süreksizdir. Sıçramalı süreksizdir.

$f(1) = 0$

$$\left.\begin{aligned} \lim_{x \to 1^-} f(x) &= \lim_{x \to 1^-} (1-x^2) = 0 \\ \lim_{x \to 1^+} f(x) &= \lim_{x \to 1^+} \frac{1}{x} = 1 \end{aligned}\right] \neq$$

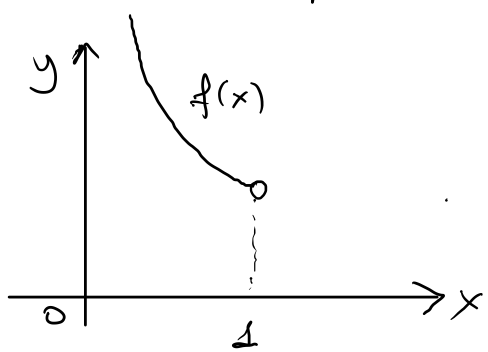
Sıçramalı süreksizdir.

* f fonksiyonunun limiti mevcut değilse (limit değeri sonlu değilse) fonksiyon limit alınan noktada sonsuz süreksizliğe sahiptir denir.

Teorem: (Max-min teoremi)

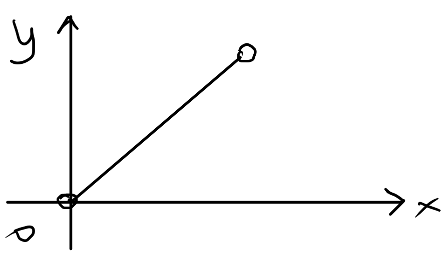
Eğer $f(x)$ fonksiyonu $[a,b]$ kapalı aralığı üzerinde tanımlı ve sürekli ise o zaman $\forall x \in [a,b]$ için

$\underbrace{f(p)}_{\text{min.}} \le f(x) \le \underbrace{f(q)}_{\text{max.}}$ olacak şekilde $p, q \in [a,b]$ noktaları vardır.



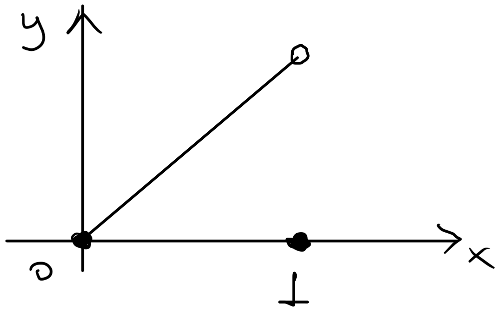
$D(f): (0,1)$

Tanım kümesi açık aralık olduğundan max ve min dan söz edilemez.
(sınırlı değil)



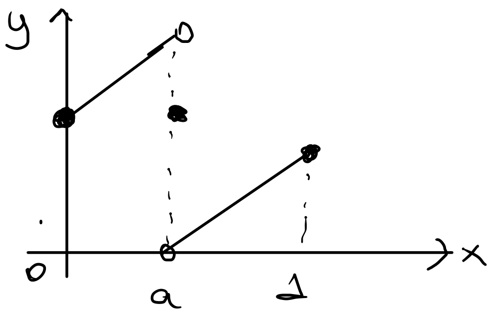
$D(f): (0,1)$

Tanım kümesi açık aralık olduğundan max ve min dan söz edilemez.
(sınırlı)



$D(f): [0,1]$

f fonksiyonu $x=1$'de süreksiz olduğundan bir max değere sahip değildir.
Ancak min. değeri vardır. (sınırlı)



$D(f): [0,1]$

f fonksiyonu tanım aralığının bir iç noktasında süreksizdir. (sınırlıdır)
Fakat max. min değeri yoktur.

Teorem (Aradeğer teoremi)

Eğer $f(x)$ fonksiyonu $[a,b]$ kapalı aralığı üzerinde sürekli ve s $f(a)$ ile $f(b)$ arasında bir sayı ise o zaman $f(c)=s$ olacak şekilde $c\in[a,b]$ sayısı vardır.

Ör/ $f(x)=x^3-4x$ 'in pozitif ve negatif olduğu aralıkları belirleyiniz.

$D(f)=(-\infty,\infty)$ $\quad$ $f(x)=0 \Rightarrow x^3-4x=0 \Rightarrow x(x^2-4)=0$

$x_1=0$, $x_2=-2$, $x_3=2$

$(-\infty,-2] \cup [-2,0] \cup [0,2] \cup [2,\infty)$

$-3 \in (-\infty,-2]$ $\quad -1 \in [-2,0]$ $\quad 1 \in [0,2]$ $\quad 3 \in [2,\infty)$

$f(-3) = -15 < 0$, $f(-1) = 3 > 0$, $f(1) = -3 < 0$ $\quad f(3) = 15 > 0$

Ör/ $x^3 - x - 1 = 0$ denkleminin $[1,2]$ aralığında bir kökü olduğunu gösteriniz.

$f(x) = x^3 - x - 1$ $\quad D(f): (-\infty,\infty)$ $\quad f$, $[1,2]$'de süreklidir.

$$\left.\begin{array}{l} f(1) = -1 < 0 \\ f(2) = 5 > 0 \end{array}\right\} \Rightarrow$$ Ara değer teo. göre $f(c) = 0$ o.ş. $c \in [1,2]$ vardır.

Sabit Nokta Teoremi

f'in $[0,1]$ kapalı aralığı üzerinde sürekli ve her $x \in [0,1]$ için $0 \le f(x) \le 1$ olduğunu kabul edelim. $[0,1]$ aralığında $f(c) = c$ olacak şekilde bir c sayısının var olduğunu gösteriniz.

- $f(0) = 0$ ve $f(1) = 1$ ise yapacak bir şey yoktur.

$f(0) \neq 0$ ve $f(1) \neq 1$ kabul edelim.

$g(x) = f(x) - x$

$g(0) = f(0) > 0$

$g(1) = f(1) - 1 < 0$

$g(1) < 0 < g(0)$

$g(c) = 0 \quad c \in [0,1]$

$g(c) = f(c) - c$

$\Rightarrow f(c) - c = 0 \Rightarrow f(c) = c$

Limit için uygulama

1) $$\lim_{x\to 0} 3x\cdot\cot 2x \overset{0\cdot\infty}{=} \lim_{x\to 0}\frac{3x\cdot\cos 2x}{\sin 2x} \overset{\frac{0}{0}}{=} \lim_{x\to 0}\frac{3\cdot 2x\cdot\cos 2x}{2\cdot\sin 2x} = \frac{3}{2}$$

2) $$\lim_{x\to\infty}\left[\sqrt{4x^2-8x+7}-(2x-5)\right] \overset{\infty-\infty}{=} \lim_{x\to\infty}\frac{\left[\sqrt{4x^2-8x+7}-(2x-5)\right]\left[\sqrt{4x^2-8x+7}+(2x-5)\right]}{\sqrt{4x^2-8x+7}+(2x-5)}$$

$$= \lim_{x\to\infty}\frac{4x^2-8x+7-(2x-5)^2}{\sqrt{4x^2-8x+7}+(2x-5)} \overset{\frac{\infty}{\infty}}{=} \lim_{x\to\infty}\frac{\cancel{4x^2}-8x+7-\cancel{4x^2}+20x-25}{\sqrt{4x^2-8x+7}+(2x-5)}$$

$$= \lim_{x\to\infty}\frac{12x-18}{\sqrt{4x^2-8x+7}+(2x-5)} = \lim_{x\to\infty}\frac{x\left(12-\frac{18}{x}\right)}{\sqrt{4x^2\left(1-\frac{2}{x}+\frac{7}{4x^2}\right)}+2x\left(1-\frac{5}{2x}\right)}$$

$$= \lim_{x\to\infty}\frac{\cancel{x}\cdot\left(12-\overset{\to 0}{\cancel{\frac{18}{x}}}\right)}{2\cancel{x}\left[\sqrt{1-\overset{\to 0}{\cancel{\frac{2}{x}}}+\overset{\to 0}{\cancel{\frac{7}{4x^2}}}}+\left(1-\overset{\to 0}{\cancel{\frac{5}{2x}}}\right)\right]} = \frac{12}{2\cdot 2} = 3$$

3) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x}{x-1}\right)^{x} \overset{1^{\infty}}{=} \lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x-1}\right)^{x-1+1} = \lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x-1}\right)^{x-1}\cdot\left(1+\dfrac{1}{x-1}\right)$

$= e\cdot 1$

$= e$

$$\begin{array}{r|l} \cancel{x} & x-1 \\ \hline -\cancel{x}+1 & 1 \\ \hline 1 & \end{array}$$

$$\boxed{\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x} = e}$$

4) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(x+1)}{x} \overset{\frac{0}{0}}{=} \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{x}\cdot\ln(x+1) = \lim\limits_{x\to 0}\ln(x+1)^{1/x} = \lim\limits_{t\to\infty}\ln\left(\dfrac{1}{t}+1\right)^{t} = \ln e = 1$

$\dfrac{1}{x} = t \Rightarrow x = \dfrac{1}{t}$

$x\to 0 \quad t\to\infty$

5) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{a^x-1}{x} \overset{\frac{0}{0}}{=} \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{a^x-1}{x}\cdot\dfrac{\ln a}{\ln a} = \ln a \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{a^x-1}{x\ln a} = \ln a \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{a^x-1}{\ln a^x}$

$$= \ln a \lim_{x\to 0}\frac{1}{\dfrac{\ln a^x}{a^x-1}} = \ln a \cdot \lim_{t\to 0}\frac{1}{\frac{1}{t}\cdot\ln(1+t)} = \ln a \cdot \lim_{t\to 0}\frac{1}{\underbrace{\ln(1+t)^{1/t}}} = \ln a$$

Bir önceki sorudan 1'e eşit olduğunu biliyoruz.

$a^x - 1 = t$

$a^x = 1 + t$

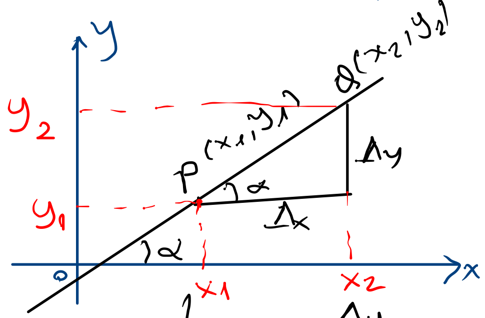
$x \to 0 \quad t \to 0$

Ödev: $\lim\limits_{x\to 1} x^{\frac{1}{1-x}} = ?$ $\qquad (c: e^{-1})$

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(2-e^x)}{1-e^x}$ $\qquad (c: 1)$

Türev

Teğet doğruları ve eğimleri



$$\tan\alpha = \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

Düzlemde dik olmayan bir doğru verildiğinde bu doğru üzerinde bulunan farklı herhangi iki nokta $P(x_1, y_1)$, $Q(x_2, y_2)$ için

$\dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ oranının değeri değişmez.

Bu değere dik olmayan doğrunun eğimi denir.

(Dik bir doğrunun eğimi tanımsızdır.)

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{\Delta y}{\Delta x} \quad \text{Dik olmayan bir doğrunun eğimi}$$

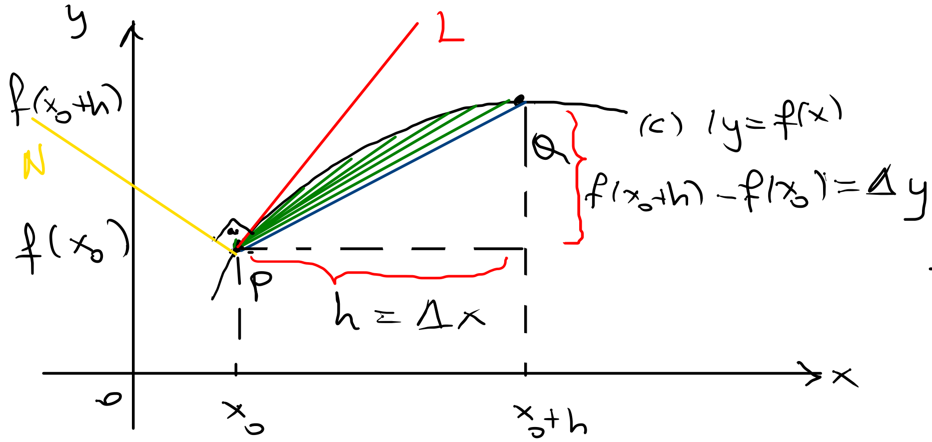
$$= \tan\alpha$$

Sonuç: 1°) iki doğrunun birbirine paralel olması için g.y.k eğim birbirine eşit olmasıdır.

2°) iki doğru birbirine dik ise eğimleri çarpımı -1'dı

lerinin

r.



$P(x_0, f(x_0))$
$Q(x_0+h, f(x_0+h))$

Bir c eğrisi ve bu eğrinin bir P noktasından geçen L doğrusu verilmiş olsun. C eğrisi üzerinden P'den farklı fakat giderek P'ye yaklaşan Q noktalarını alalım. Eğer L doğrusunun eğimi, Q noktası P ye yaklaşırken, bu PQ doğrularının eğimleri ise o zaman L doğrusu P'de eğriye teğettir.

PQ doğrusunun eğimi;

$$\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = \frac{-[f(x_0)-f(x_0+h)]}{h}$$ (Newton bölümü ya da fark bölümü)

Dik olmayan teğet doğruları

f fonksiyonu x_0 noktasında sürekli ve $\lim\limits_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = m$ limitinin mevcut olduğunu kabul edelim. O zaman m eğimine sahip olan ve $P(x_0, f(x_0))$ noktasından geçen doğruya $y=f(x)$ eğrisinin P'deki teğet doğrusu denir ve denklemi

$$\boxed{y = m(x-x_0)+y_0}$$

şeklindedir.

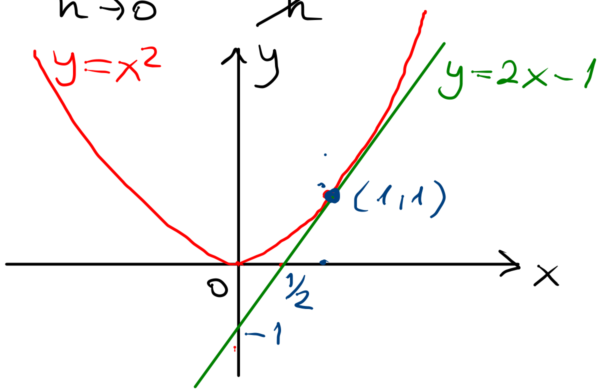
$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_2-y_1}{x_2-x_1} = m$$

Ör/ $y=x^2$ eğrisine $(\overset{x_0}{1},\overset{y_0}{1})$ noktasında teğet olan doğrunun denk.'ni bulunuz.

$$m=\lim_{h\to 0}\frac{f(1+h)-f(1)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{(1+h)^2-1}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\cancel{1}+2h+h^2-\cancel{1}}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\cancel{h}(2+h)}{\cancel{h}}=2$$

$$y=m(x-x_0)+y_0$$

$$y=2\cdot(x-1)+1=2x-1$$



Dikey Teğetler

f fonksiyonu $P(x_0,y_0)=P(x_0,f(x_0))$ noktasında sürekli ve

ya $\displaystyle\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}=\infty$

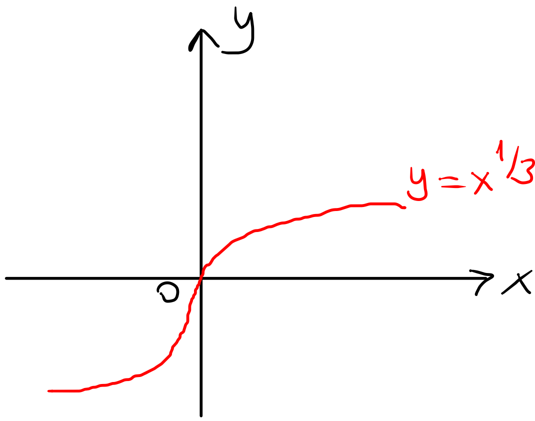
ya da $\displaystyle\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}=-\infty$

ise o zaman $x=x_0$ dikey doğrusu P'de fonksiyonun grafiğine teğettir. Eğer Newton bölümünün limiti ∞ veya $-\infty$ hariç mevcut değilse fonksiyon P'de teğete sahip olmaz.

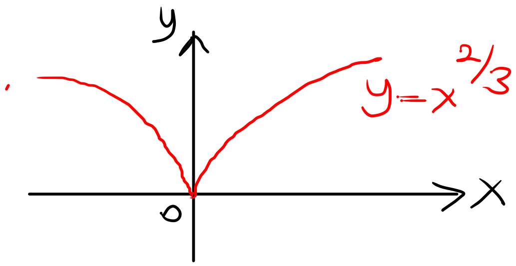
Örnekler

1) $f(x)=x^{1/3}$ fonksiyonunun orjindeki teğet doğrusu y-eksenidir.

$(0,0)$



$$m=\lim_{h\to 0}\frac{f(0+h)-f(0)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{h^{1/3}-0}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{h^{1/3}}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{1}{h^{2/3}}=\infty$$



2) $f(x)=x^{2/3}$ fonksiyonu orjinde herhangi bir tepete sahip değildir.

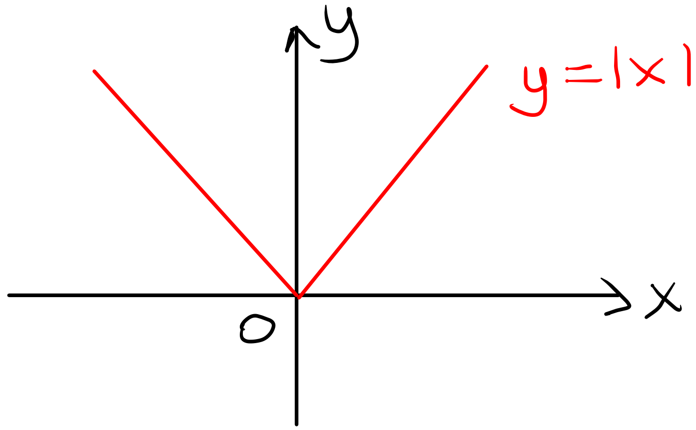
$$m=\lim_{h\to 0}\frac{f(0+h)-f(0)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{h^{2/3}-0}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{h^{2/3}}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{1}{h^{1/3}}$$

$$\lim_{h\to 0^+}\frac{1}{h^{1/3}}\to\infty$$

$$\lim_{h\to 0^-}\frac{1}{h^{1/3}}\to-\infty$$

3) $y=|x|$ fonksiyonu $x=0$'da teğete sahip midir?

$$m=\lim_{h\to 0}\frac{f(0+h)-f(0)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{|0+h|-0}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{|h|}{h}=\begin{cases}1 & h>0\\ -1 & h<0\end{cases}$$



limit mevcut olmadığından $x=0$'da teğet yoktur.

Bir eğrinin eğimi :

Bir c eğrisinin bir P noktasındaki eğimi, P noktasında eğriye teğet olan doğrunun eğimidir.

Ör/ $y = \dfrac{x}{3x+2}$ eğrisinin $x=-2$ noktasındaki eğimini bulunuz.

$$m = \lim_{h\to 0} \frac{f(-2+h)-f(-2)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\frac{-2+h}{3(-2+h)+2} - \left(\frac{-2}{-6+2}\right)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\frac{-2+h}{3h-4} - \frac{1}{2}}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{-4+2h-(3h-4)}{2(3h-4)\cdot h} = \lim_{h\to 0} \frac{-\cancel{h}}{2\cancel{h}(3h-4)} = \frac{1}{8}$$

Normal Doğrusu

Eğer bir C eğrisinin bir P noktasındaki teğeti L ise P'den geçen ve L'ye dik olan N doğrusuna eğrinin P'deki normal doğrusu denir.

$$\boxed{y = \frac{-1}{m}(x-x_0)+y_0}$$ Normal doğrusunun denklemi

$m \to$ teğetin eğimi ise

$\frac{-1}{m} \to$ normalin eğimi

L yatay ⇒ N dikey

L dikey ⇒ N yatay

L dikey veya yatay değilse $\underset{\text{Normal}}{N}$'in eğimi $= \dfrac{-1}{\underset{\text{Teğet}}{L}\text{'nin eğimi}}$

Ör/ $y=x^2$'nin $(1,1)$ noktasındaki normalinin eğimini ve normal doğrusunun denklemini bulunuz.

$$m=\lim_{h\to 0}\frac{f(1+h)-f(1)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{(1+h)^2-1}{h}=2 \rightarrow \text{teğetin eğimi}$$

Normalin eğimi $=\frac{-1}{m}=-\frac{1}{2}$

Normal doğrusunun denklemi : $y=\frac{-1}{2}(x-1)+1=\frac{-x}{2}+\frac{3}{2}$

Türevin tanımı

Bir fonksiyonun türevi mevcut olması koşuluyla

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=f'(x)=y'=\frac{dy}{dx}=\frac{df}{dx}=Df=Dy \quad \left(\frac{d}{dx}=D \text{ denirse}\right)$$

limiti ile tanımlanan başka bir f' fonksiyonudur.

Buna göre bir f fonksiyonunun x_0 noktasındaki türevi fonksiyonun x_0 noktasındaki teğetinin eğimidir.

Teğet doğ. denk : $y=f'(x_0)(x-x_0)+y_0$ / Normal doğ. denk : $y=\frac{-1}{f'(x_0)}(x-x_0)+y_0$

- $D(f')$, $D(f)$'den küçüktür veya $D(f)$'e eşittir.
- Fonksiyonun diferansiyellenebilir (türevlenebilir) olmadığı ve $D(f)$'in uç noktası olmayan x değerlerine f'in tekil noktaları denir.
- $$\lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = f'(x_0) = \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$$ $\left(\begin{array}{l} x_0+h = x \\ h = x-x_0 \end{array}\right)$ $h\to 0$, $x\to x_0$

- (Sağ- sol türev)

$$\lim_{h\to 0^+} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = f'_+(x) \to \text{sağ türev}$$
$$\lim_{h\to 0^-} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = f'_-(x) \to \text{sol türev}$$

Bir f fonksiyonunun bir x_0 noktasında türevlenebilir olması için gerek ve yeter koşul bu noktada sağ ve sol türevinin mevcut ve birbirine eşit olmasıdır.

- $\forall x \in (a,b)$ için $f'(x)$ mevcut ve $f'_+(a)$ ile $f'_-(b)$'nin her ikisi de mevcut ise f fonksiyonu $[a,b]$ kapalı aralığı üzerinde türevlenebilirdir denir.

Ör/

$$f(x)=\begin{cases} 2x-1 & x\geq 0 \\ x^2+2x+7 & x<0 \end{cases}$$ fonksiyonu $x=0$'da türevlenebilir midir? $f(0)=-1$

$$f'_-(0)=\lim_{h\to 0^-}\frac{f(0+h)-f(0)}{h}=\lim_{h\to 0^-}\frac{h^2+2h+7-(-1)}{h}=\lim_{h\to 0^-}\frac{h^2+2h+8}{h}=-\infty$$

$$\neq$$

$$f'_+(0)=\lim_{h\to 0^+}\frac{f(0+h)-f(0)}{h}=\lim_{h\to 0^+}\frac{(2h-1)-(-1)}{h}=\lim_{h\to 0^+}\frac{2h}{h}=2$$

Türevlenebilir değildir.

TÜREV TANIMIYLA İLGİLİ ÖRNEKLER

1) $f(x) = ax+b \Rightarrow f'(x) = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{a(x+h)+b-(ax+b)}{h}$

$= \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{\cancel{ax}+ah+\cancel{b}-\cancel{ax}-\cancel{b}}{h} = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{a\cancel{h}}{\cancel{h}} = a$

2) $f(x) = c \quad (c \to sbt)$

$\Rightarrow f'(x) = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{c-c}{h} = 0$

3) $f(x) = x^2$

$\Rightarrow f'(x) = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{(x+h)^2-x^2}{h} = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{\cancel{x^2}+2xh+h^2-\cancel{x^2}}{h}$

$= \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{\cancel{h}(2x+h)}{\cancel{h}} = 2x$

4) $f(x) = \dfrac{1}{x}$

$\Rightarrow f'(x) = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{\dfrac{1}{x+h}-\dfrac{1}{x}}{h} = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{x-(x+h)}{h\,x\,(x+h)}$

$= \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{-\cancel{h}}{\cancel{h}\cdot x(x+h)} = \dfrac{-1}{x^2}$

5) $f(x) = \sqrt{x} \Rightarrow \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{\sqrt{x+h} - \sqrt{x}}{h}$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{(\sqrt{x+h} - \sqrt{x})(\sqrt{x+h} + \sqrt{x})}{h(\sqrt{x+h} + \sqrt{x})}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{\cancel{x} + h - \cancel{x}}{h(\sqrt{x+h} + \sqrt{x})} = \lim_{h \to 0} \frac{\cancel{h}}{\cancel{h}(\sqrt{x+h} + \sqrt{x})}$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$\binom{p}{q} = \frac{p!}{q!\,(p-q)!}$$

$0! = 1 \quad , \quad 1! = 1$

$$\binom{n}{n-1} = \frac{n!}{(n-1)!\,.\,(n-(n-1))!} = \frac{n\,\cancel{(n-1)!}}{\cancel{(n-1)!}\,.\,1!}$$

6) $f(x) = x^n \quad n \in \mathbb{N} \qquad (n \in \mathbb{R})$

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{(x+h)^n - x^n}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{\binom{n}{n} x^n h^0 + \binom{n}{n-1} x^{n-1} h^1 + \cdots + \binom{n}{1} x . h^{n-1} + \binom{n}{0} x^0 h^n - x^n}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{\cancel{x^n} + n x^{n-1} h + \cdots + n.x.h^{n-1} + h^n - \cancel{x^n}}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{\cancel{h}\left[n x^{n-1} + \cdots + n x h^{n-2} + h^{n-1}\right]}{\cancel{h}}$$

$$= n\, x^{n-1}$$

NOT: Bir türev fonksiyonunun sürekli olması gerekmemesine karşın sürekli fonksiyonlar gibi türev fonksiyonu da aradeğer özelliğine sahiptir.

Teorem: f fonksiyonu $x=a$ noktasında türeve sahip ise bu noktada süreklidir. (Teoremin tersi her zaman doğru değildir. Ör/ $f(x)=|x|$ $x=0$'da süreklidir ama türevi yoktur)

TÜREV KURALLARI

f ve g fonksiyonları x'de türevlenebilir fonksiyonlar olsunlar

1) $(f \mp g)'(x) = f'(x) \mp g'(x)$

2) $(c.f)'(x) = c.f'(x)$ $\quad (c \in \mathbb{R})$

3) $(f.g)'(x) = f'(x).g(x) + g'(x).f(x)$

$$\left\{ (f_1.f_2.f_3 \cdots f_n)'(x) = f_1'(x).f_2(x).f_3(x) \ldots f_n(x) + f_1(x).f_2'(x)f_3(x) \ldots f_n(x) + \cdots + f_1(x)f_2(x) \ldots f_n'(x) \right\}$$

4) $\left(\dfrac{f}{g}\right)'(x) = \dfrac{f'(x).g(x) - g'(x).f(x)}{[g(x)]^2}$

Örnekler

1) $f(x) = 5\sqrt{x} + \frac{3}{x} - 18 \Rightarrow f'(x) = \left[5\sqrt{x} + \frac{3}{x} - 18\right]'$

$$= (5\sqrt{x})' + \left(\frac{3}{x}\right)' - (18)' = 5 \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} + 3 \cdot \left(-\frac{1}{x^2}\right) - 0$$

2) $y = \frac{t^4}{7} - 3t^{7/3} \Rightarrow y' = \frac{1}{7} \cdot 4 \cdot t^3 - 3 \cdot \frac{7}{3} t^{4/3}$

3) $y = \frac{3x^3 - 4}{x}$ eğrisine $(-2, y)$ noktasında teğet olan doğrunun denklemini yazınız.

$y = \frac{3 \cdot (-2)^3 - 4}{-2} = 14$

$$y' = \frac{9x^2 \cdot x - 1 \cdot (3x^3 - 4)}{x^2} = \frac{9x^3 - 3x^3 + 4}{x^2}$$

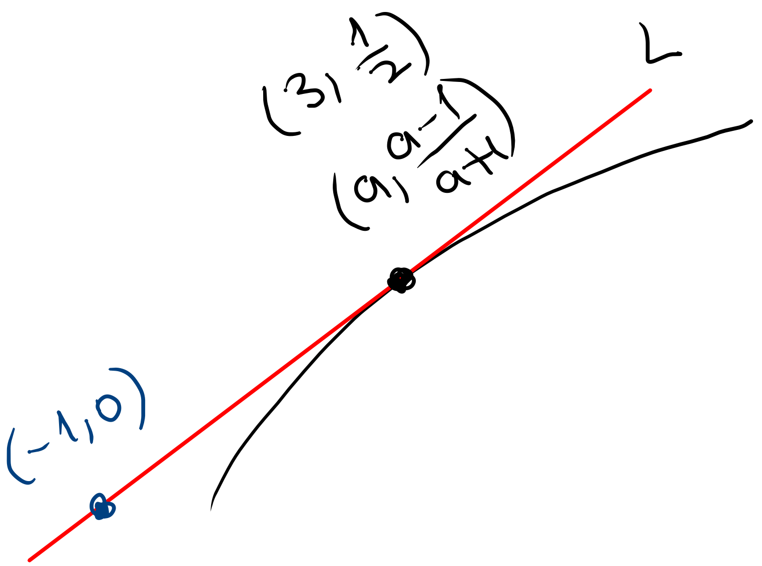
$$= \frac{6x^3 + 4}{x^2} \Rightarrow y'\Big|_{(-2,14)} = \frac{-48+4}{4} = -11$$

$y = -11(x+2) + 14 = -11x - 8$

4) $y = u.v$, $u(2) = 2$, $u'(2) = -5$, $v(2) = -1$, $v'(2) = 3 \Rightarrow y'(2) = ?$

$y' = u'v + v'u$ $\qquad$ $y'(2) = (-5)\cdot(-1) + 3.2 = 11$

5) $(-1,0)$ noktasından geçen ve $y = \dfrac{x-1}{x+1}$ doğrusuna teğet olan doğrunun denk. bulunuz



$y = \dfrac{x-1}{x+1}$

L doğrusunun eğimi:

$$\frac{\frac{a-1}{a+1} - 0}{a+1} = m \Rightarrow m = \frac{a-1}{(a+1)^2} \quad (1)$$

$$y' = \frac{x+1-(x-1)}{(x+1)^2} = \frac{2}{(x+1)^2}$$

$$y'\Big|_{(a,\frac{a-1}{a+1})} = \frac{2}{(a+1)^2}$$

$$\frac{2}{(a+1)^2} = \frac{a-1}{(a+1)^2} \Rightarrow a-1 = 2 \Rightarrow a = 3$$

$$y'\Big|_{(3,\frac{1}{2})} = \frac{1}{8}$$

$$y = \frac{1}{8}(x-3) + \frac{1}{2}$$

Zincir Kuralı

$$(f \circ g)'(x) = \{f[g(x)]\}' = g'(x) \cdot f'[g(x)]$$

Ör/ $y = \sqrt{x^2+1} \Rightarrow y' = \cancel{2}x \cdot \dfrac{1}{\cancel{2}\sqrt{x^2+1}} = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}$

Ör/ $y = \left(3x + \dfrac{1}{(2x+1)^3}\right)^{1/4} \Rightarrow y' = \left[3 + \left(\dfrac{-6}{(2x+1)^4}\right)\right] \cdot \dfrac{1}{4}\left[3x + \dfrac{1}{(2x+1)^3}\right]^{-3/4}$

Ör/ $\frac{d}{dx}\left[f(\pi \cdot f(x))\right] = \pi \cdot f'(x) \cdot f'(\pi f(x))$

Ör/ $\frac{d}{dx}\left\{\left[f(3-2f(x))\right]^4\right\} = \left[f(3-2f(x))\right]' \cdot 4 \cdot \left[f(3-2f(x))\right]^3$

$= -2f'(x) \cdot f'(3-2f(x)) \cdot 4\left[f(3-2f(x))\right]^3$

$u = u(x)$ olmak üzere;

- $\frac{d}{dx}\left[u^n\right] = n \cdot u' \cdot u^{n-1}$
- $\frac{d}{dx}\left[\frac{1}{u}\right] = \frac{-u'}{u^2}$
- $\frac{d}{dx}\left[\sqrt{u}\right] = \frac{u'}{2\sqrt{u}}$
- $\frac{d}{dx}\left[|u|\right] = u' \cdot \operatorname{sgn}(u) = u' \cdot \frac{|u|}{u}$

Trigonometrik Fonksiyonların türevleri

$$y=\sin x \Rightarrow y' = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\sin(x+h)-\sin x}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{\sin x \cdot \cos h + \cos x \cdot \sin h - \sin x}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{\sin x(\cos h - 1) + \cos x \cdot \sin h}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \left[\frac{\sin x \cdot \left(-2\sin^2 \frac{h}{2}\right) + \cos x \cdot \sin h}{h} \right]$$

$$= \lim_{h\to 0} \left[\frac{-\sin x \cdot \sin\frac{h}{2} \cdot \sin\frac{h}{2}}{h/2} + \frac{\cos x \cdot \sin h}{h} \right] = \cos x$$

$$y=\cos x \Rightarrow y' = -\sin x$$

$$y = \tan x = \frac{\sin x}{\cos x} \Rightarrow y' = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x} = \sec^2 x = 1 + \tan^2 x$$

$$y = \cot x = \frac{\cos x}{\sin x} \Rightarrow y' = \frac{-\sin^2 x - \cos^2 x}{\sin^2 x} = \frac{-1}{\sin^2 x} = -\csc^2 x = -(1 + \cot^2 x)$$

$$y = \sec x = \frac{1}{\cos x} \Rightarrow y' = \frac{\sin x}{\cos^2 x} = \frac{\sin x}{\cos x . \cos x} = \sec x . \tan x$$

$$y = \csc x = \frac{1}{\sin x} \Rightarrow y' = \frac{-\cos x}{\sin^2 x} = \frac{-\cos x}{\sin x . \sin x} = -\csc x . \cot x$$

$u = u(x) \Rightarrow$

$$y = \sin u \Rightarrow y' = u' . \cos u$$

$$y = \cos u \Rightarrow y' = -u' . \sin u$$

$$y = \tan u \Rightarrow y' = u'(1 + \tan^2 u) = u' . \sec^2 u$$

$$y = \cot u \Rightarrow y' = -u'(1 + \cot^2 u) = -u' \csc^2 u$$

$$y = \sec u \Rightarrow y' = u' . \tan u . \sec u$$

$$y = \csc u \Rightarrow y' = -u' . \cot u . \csc u$$

Örnekler

1) $y=\sin(\pi x)+\cos(3x) \Rightarrow y'=\pi\cos(\pi x)-3.\sin(3x)$

2) $y=x^2\sin\sqrt{x} \Rightarrow y'=2x.\sin\sqrt{x}+x^2\frac{1}{2\sqrt{x}}.\cos\sqrt{x}$

3) $y=3x+\cot\left(\frac{x}{2}\right) \Rightarrow y'=3-\frac{1}{2}\csc^2\left(\frac{x}{2}\right)$

4) $y=\tan\frac{\pi x}{4}$ eğrisinin $(1,1)$ noktasındaki teğet ve normal doğrularının denklemlerini bulunuz.

$$y'=\frac{\pi}{4}\sec^2\left(\frac{\pi x}{4}\right) \qquad y'\Big|_{(1,1)}=\frac{\pi}{4}.2=\frac{\pi}{2}$$

Teğet doğ. denklemi : $y=\frac{\pi}{2}(x-1)+1$

Normal doğ. denklemi : $y=\frac{-2}{\pi}(x-1)+1$

Yüksek Mertebeden Türevler

Eğer $y=f(x)$ fonksiyonunun türevi olan $f'(x)$ x'de diferansiyellenebilir ise (yani Newton bölümünün limiti mevcut ise $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f'(x+h)-f'(x)}{h}=f''(x)$) o zaman buna f'in 2. mertebeden türevi denir.

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{df}{dx}\right)=f''(x)=y''=\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d^2f}{dx^2}=D^2y=D^2f \qquad \left(D=\frac{d}{dx}\right)$$

$$f'''(x)=(f''(x))'=\frac{d}{dx}\left(\frac{d^2f}{dx^2}\right)=\frac{d^3f}{dx^3}=y'''=\frac{d^3y}{dx^3}=D^3y=D^3f$$

$$\vdots$$

$$f^{(n)}(x)=\left[f^{(n-1)}(x)\right]'=\frac{d^nf}{dx^n}=\frac{d^ny}{dx^n}=y^{(n)}=D^ny=D^nf$$