Ö/ $f(x,y)=\dfrac{x^2y}{x^2+y^2}$ fonksiyonunun orjinde limite sahip olduğunu gösteriniz.

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)=\lim_{x\to 0}\left[\lim_{y\to 0}\frac{x^2y}{x^2+y^2}\right]=\lim_{x\to 0}\left[\frac{0}{x^2}\right]=0=L$$

$\forall\, \varepsilon>0$ için $0<\sqrt{x^2+y^2}<\delta$ iken $\left|\dfrac{x^2y}{x^2+y^2}-0\right|<\varepsilon$ olacak şekilde bir $\delta=\delta(\varepsilon)>0$ sayısı bulmalıyız.

$$\left|\frac{x^2y}{x^2+y^2}\right|\leq\left|\frac{(x^2+y^2)\cdot y}{x^2+y^2}\right|=|y|<\sqrt{x^2+y^2}<\delta \Rightarrow \delta=\varepsilon \text{ alındığında } \lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{x^2y}{x^2+y^2}=0$$

olduğu elde edilir.

$x^2\leq x^2+y^2$

$y^2\leq x^2+y^2 \Rightarrow |y|^2\leq x^2+y^2$

$|y|\leq\sqrt{x^2+y^2}$

Süreklilik

Tanım: $\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y)=f(a,b)$ ise $f(x,y)$ fonksiyonu (a,b) noktasında süreklidir denir.

- f (a,b)'de tanımlı olmalı, • $\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y)$ mevcut olmalı.

• Fonksiyonun (a,b) için limit değeri bu noktadaki değerine eşit olmalı.

Tanım: $\forall\ \varepsilon>0$ sayısı için $0<\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2}<\delta$ iken $|f(x,y)-f(a,b)|<\varepsilon$ olacak şekilde bir $\delta=\delta(\varepsilon)>0$ sayısı bulunabiliyorsa $f(x,y)$ fonksiyonu (a,b) de süreklidir denir.

ÖRNEKLER

1) $$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{2xy}{x^2+y^2} & (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & (x,y)=(0,0)\end{cases}$$ fonksiyonunun $(0,0)$ noktasındaki sürekliliğini inceleyiniz.

• $f(0,0)=0$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)=\lim_{x\to 0}\left[\lim_{y\to 0}\frac{2xy}{x^2+y^2}\right]=\lim_{x\to 0}\left[\frac{0}{x^2}\right]=0$$

$y=x$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)=\lim_{\substack{x\to 0\\ y=x}}\frac{2x^2}{x^2+x^2}=1$$

$\neq$

fonksiyonun $(0,0)$'da limiti mevcut değildir. Dolayısıyla fonksiyon $(0,0)$'da süreksizdir.

2) $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy-y^2}{\sqrt{x}+\sqrt{y}} & x>0,\ y>0 \\ 0 & (x,y)=(0,0) \end{cases}$ fonksiyonunun sürekli olduğunu gösteriniz.

$f(0,0)=0$ fonksiyon tanımlı.

* $x \neq y$ ise;

$$\frac{xy-y^2}{\sqrt{x}+\sqrt{y}} \cdot \frac{\sqrt{x}-\sqrt{y}}{\sqrt{x}-\sqrt{y}} = \frac{(xy-y^2)(\sqrt{x}-\sqrt{y})}{x-y} = \frac{y\cancel{(x-y)}(\sqrt{x}-\sqrt{y})}{\cancel{x-y}} = y(\sqrt{x}-\sqrt{y})$$

$$\Rightarrow \lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\(x\neq y)}} \frac{xy-y^2}{\sqrt{x}+\sqrt{y}} = \lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\(x\neq y)}} y(\sqrt{x}-\sqrt{y}) = 0 = f(0,0)$$

* $x=y$ ise;

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\(x=y)}} \frac{xy-y^2}{\sqrt{x}+\sqrt{y}} = \lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\(x=y)}} \frac{y^2-y^2}{\sqrt{y}+\sqrt{y}} = \frac{0}{2\sqrt{y}} = 0 = f(0,0)$$

$$\Rightarrow \lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = f(0,0) \Rightarrow f \text{ süreklidir.}$$

3) $f(x,y)=\begin{cases} \dfrac{x^3-xy^2}{x^2+y^2} & (x,y)\neq(0,0) \\ 0 & (x,y)=(0,0) \end{cases}$ fonksiyonunun orjinde sürekli olduğunu gösteriniz.

$f(0,0)=0$

$\forall \varepsilon>0$ sayısı için $0<\sqrt{x^2+y^2}<\delta$ iken $\left| \dfrac{x^3-xy^2}{x^2+y^2} - \underbrace{f(0,0)}_{=0} \right| < \varepsilon$ olacak şekilde bir $\delta=\delta(\varepsilon)>0$ sayısı bulmamız gerekir.

$$\left| \frac{x^3-xy^2}{x^2+y^2} \right| = \left| \frac{x(x^2-y^2)}{x^2+y^2} \right| = |x| \left| \frac{(x^2-y^2)}{(x^2+y^2)} \right| \leq |x| \cdot \frac{|x^2+y^2|}{|x^2+y^2|} = |x| < \sqrt{x^2+y^2} < \delta$$

$\delta=\varepsilon>0$ alındığında fonksiyonun $(0,0)$'da sürekli olduğu elde edilir.

Bileşkelerin sürekliliği

Eğer $f(x,y)$ fonksiyonu (x_0,y_0) noktasında sürekli ve g fonksiyonu da $f(x_0,y_0)$ noktasında sürekli olan tek değişkenli bir fonksiyon ise bu durumda $g[f(x,y)]$ fonksiyonu da süreklidir.

Ör/ e^{x-y} $\quad f(x,y)=x-y$ $\quad g(x)=e^x$

Ör/ $\ln(1+x^2+y^2)$

KISMİ TÜREVLER

Tanım: $f(x,y)$ fonksiyonunun x ve y değişkenlerine göre birinci mertebeden kısmi türevleri

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h,y)-f(x,y)}{h} \quad \text{ve} \quad \lim_{k\to 0}\frac{f(x,y+k)-f(x,y)}{k}$$

limitlerinin mevcut olması koşuluyla sırasıyla $\frac{\partial z}{\partial x}$ ve $\frac{\partial z}{\partial y}$ fonksiyonlarıdır. Burada $\frac{\partial z}{\partial x}$, y sabit bir parametre olmak üzere sadece x'in bir fonksiyonu olarak göz önüne alınan $f(x,y)$ fonksiyonunun x'e göre birinci mertebe türevidir.

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}=f_1(x,y)=f_x(x,y) \quad , \quad \frac{\partial}{\partial x}=D_x \Rightarrow \frac{\partial z}{\partial x}=D_x z=D_x f(x,y)$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}=f_2(x,y)=f_y(x,y) \quad , \quad \frac{\partial}{\partial y}=D_y \Rightarrow \frac{\partial z}{\partial y}=D_y z=D_y f(x,y)$$

Ör/ $z=f(x,y)=x^2\sin y$

$$\frac{\partial z}{\partial x}=2x\sin y$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=x^2\cos y$$

Ör/ $u=f(x,y,z)=\dfrac{2xy}{1+xz+yz}$

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{2y(1+xz+yz)-z\cdot 2xy}{(1+xz+yz)^2}=\frac{2y(1+yz)}{(1+xz+yz)^2}$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{2x(1+xz+yz)-z\cdot 2xy}{(1+xz+yz)^2}=\frac{2x(1+xz)}{(1+xz+yz)^2}$$

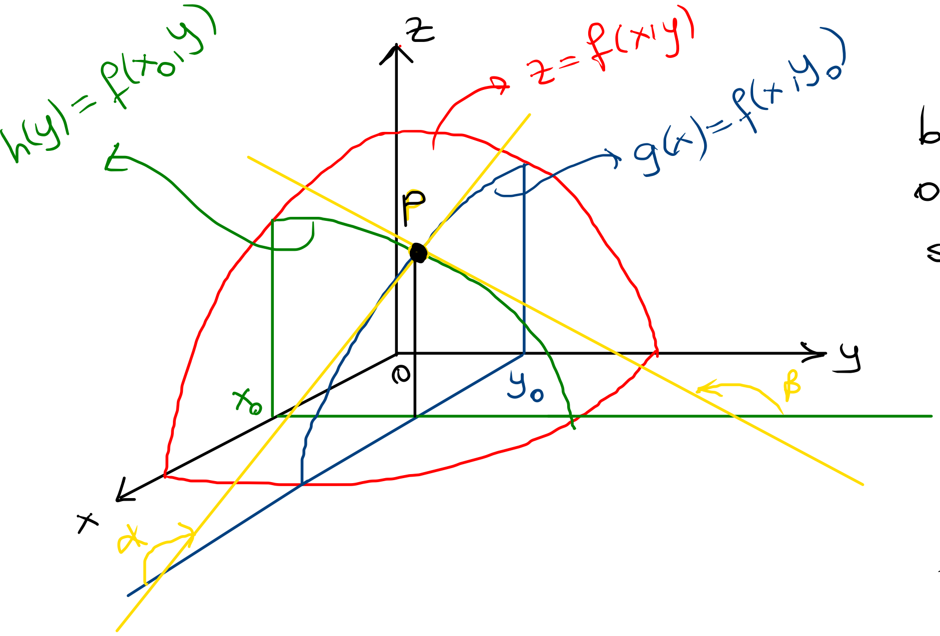
$$\frac{\partial u}{\partial z}=\frac{0\cdot(1+xz+yz)-(x+y)\cdot 2xy}{(1+xz+yz)^2}=\frac{-2xy(x+y)}{(1+xz+yz)^2}$$

Ör/ $z=f(x,y)=xy^2-x^2+y$ fonksiyonunun $(2,3)$ noktasındaki y'ye göre kısmi türevini tanımdan yararlanarak hesaplayınız.

$$\frac{\partial u}{\partial y}=\lim_{k\to 0}\frac{f(x,y+k)-f(x,y)}{k}\Rightarrow \left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_{(2,3)}=\lim_{k\to 0}\frac{f(2,3+k)-f(2,3)}{k}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=2xy+1\Rightarrow \left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_{(2,3)}=13$$

Kısmi türevin geometrik anlamı



$z=f(x,y)$ iki değişkenli fonksiyonu üç boyutlu uzayda bir S yüzeyi gösterir. Bu yüzey üzerindeki bir nokta $P(x,y,z)$ olsun. Yüzeyin denkleminde $y=y_0$ olarak y değişkenini sabit yaparsak elde edilen $z=f(x,y_0)=g(x)$ tek değişkenli fonksiyonu, S yüzeyi üzerinde P noktasından geçen ve xoz-düzlemine paralel olan bir eğrinin denklemidir. Benzer şekilde yüzeyin denkleminde $x=x_0$ alarak x değişkenini sabit kılarsak elde edilen $z=f(x_0,y)=h(y)$ tek değişkenli fonksiyonu, S yüzeyi üzerinde P noktasından geçen ve yoz-düzlemine paralel olan bir eğrinin denklemidir.

$\frac{\partial z}{\partial x}$ ve $\frac{\partial z}{\partial y}$ kısmi türevleri sırasıyla $z=f(x,y_0)$ ve $z=f(x_0,y)$ eğrilerinin göz önüne alınan P noktasındaki türevleri olduğundan, bu kısmi türevlerin geometrik anlamları, bu eğrilerin P noktasındaki teğetlerinin eğimi olur.

$$\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_P=\tan\alpha \qquad \left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_P=\tan\beta$$

NOT: Toplamlar, çarpımlar ve bölümler için geçerli olan standart tüm türev kuralları kısmi türevler için de geçerlidir.

Ör/ $z = x^3y^2 + x^4y + y^4 \Rightarrow \dfrac{\partial z}{\partial x} = 3x^2y^2 + 4x^3y \;,\; \dfrac{\partial z}{\partial y} = 2x^3y + x^4 + 4y^3$

Ör/ $f(x,y) = e^{xy}\cos(x+y) \Rightarrow \dfrac{\partial f(0,\pi)}{\partial x} = ?$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = y.e^{xy}\cos(x+y) + (-e^{xy}.\sin(x+y)) = e^{xy}\left[y\cos(x+y) - \sin(x+y)\right]$$

$$\frac{\partial f(0,\pi)}{\partial x} = \underbrace{e^0}_{1}\left[\pi.\underbrace{\cos\pi}_{-1} - \underbrace{\sin\pi}_{=0}\right] = -\pi$$

NOT: Zincir kuralının tek değişkenli versiyonu f fonksiyonunun türevi olan f' fonksiyonu tek değişkenli olmak üzere $f[g(x,y)]$ fonksiyonuna da uygulanabilir.

$$\frac{\partial}{\partial x}\left[f(g(x,y))\right] = \frac{\partial g}{\partial x}.f'\left[g(x,y)\right] \;,\; \frac{\partial}{\partial y}\left[f(g(x,y))\right] = \frac{\partial g}{\partial y}.f'\left[g(x,y)\right]$$

Ör/ f, her yerde türevlenebilir, tek değişkenli bir fonksiyon olmak üzere $z=f\left(\frac{x}{y}\right)$'nin

$x\cdot\frac{\partial z}{\partial x}+y\cdot\frac{\partial z}{\partial y}=0$ denklemini sağladığını gösteriniz.

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{1}{y}f'\left(\frac{x}{y}\right), \quad \frac{\partial z}{\partial y}=\left(-\frac{x}{y^2}\right)f'\left(\frac{x}{y}\right)$$

$$x\cdot\frac{\partial z}{\partial x}+y\frac{\partial z}{\partial y}=x\cdot\left[\frac{1}{y}f'\left(\frac{x}{y}\right)\right]+\cancel{y}\left[\left(\frac{-x}{y^{\cancel{2}}}\right)f'\left(\frac{x}{y}\right)\right]=\frac{x}{y}f'\left(\frac{x}{y}\right)-\frac{x}{y}f'\left(\frac{x}{y}\right)=0$$

Kısmi türevler ve Süreklilik

Tek değişkenli bir fonksiyon bir a noktasında türeve sahip ise fonksiyon bu noktada süreklidir denir. Ancak bu özellik kısmi türevler için geçerli değildir. Yani bir $f(x,y)$ fonksiyonu belirli bir noktada hem x'e hemde y'ye göre kısmi türevlere sahip olduğu halde o noktada sürekli olmayabilir.

Ör/ $f(x,y)=\begin{cases} \dfrac{xy}{x^2+y^2} & (x,y)\neq(0,0) \\ 0 & (x,y)=(0,0) \end{cases}$

$$\frac{\partial f}{\partial x}=\lim_{h\to 0}\frac{f(0+h,0)-f(0,0)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\frac{(0+h).0}{(0+h)^2+0^2}-0}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\frac{0}{h^2}-0}{h}=\lim_{h\to 0}\left(\frac{0}{h}\right)=0$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}=\lim_{k\to 0}\frac{f(0,0+k)-f(0,0)}{k}=\lim_{k\to 0}\frac{\frac{0.(0+k)}{0^2+(0+k)^2}-0}{k}=\lim_{k\to 0}\frac{\frac{0}{k^2}-0}{k}=\lim_{k\to 0}\left(\frac{0}{k}\right)=0$$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)=\lim_{\substack{x\to 0\\ y=kx}}\frac{x.kx}{x^2+k^2x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{k\cancel{x^2}}{\cancel{x^2}(1+k^2)}=\frac{k}{1+k^2}$$

fonksiyon orjinde limite sahip olmadığından (her k değeri için limit değeri farklıdır) fonksiyon (0,0)'da süreksizdir.

Yüksek Mertebeden Türevler

İki ve daha yüksek mertebeden kısmi türevler hesaplanmış mevcut kısmi türevlerin kısmi türevleri alınarak elde edilir.

$$z = f(x,y)$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial f(x,y)}{\partial x} \qquad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial f(x,y)}{\partial y}$$

$$\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x^2} \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$$

$$\frac{\partial^3 f}{\partial x^3} \quad \frac{\partial^3 f}{\partial y \partial x^2} \quad \frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y \partial x} \quad \frac{\partial^3 f}{\partial y^2 \partial x} \quad \frac{\partial^3 f}{\partial x^2 \partial y} \quad \frac{\partial^3 f}{\partial y \partial x \partial y} \quad \frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y^2} \quad \frac{\partial^3 f}{\partial y^3}$$

⋮

★ Türev alma sırası kullanılan notasyona göre farklıdır.

$$\frac{\partial z}{\partial x} \nearrow \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \qquad \frac{\partial z}{\partial x} \searrow \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$$

$$f_x(x,y) \nearrow f_{xx}(x,y) \qquad f_x(x,y) \searrow f_{xy}(x,y)$$

$$u = f(x,y,z)$$

$$\frac{\partial^3 u}{\partial y \partial x^2 \partial z} = f_{zxxy}$$

Ör/ $f(x,y)=x^3y^4$ fonksiyonunun ikinci mertebe kısmi türevlerini bulunuz.

$$\frac{\partial f}{\partial x}=3x^2y^4 \rightarrow \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}=6xy^4$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}=3x^2y^4 \rightarrow \frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}=12x^2y^3$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}=4x^3y^3 \rightarrow \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}=12x^2y^3$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}=4x^3y^3 \rightarrow \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=12x^3y^2$$

$$= \lim_{k \to 0} \frac{\left[2\cdot(3+k)^2 - 4 + (3+k)\right] - \left[2\cdot 9 - 4 + 3\right]}{k}$$

$$= \lim_{k \to 0} \frac{2\cdot(9+6k+k^2) \cancel{-4} \cancel{+3} + k - 18 \cancel{+4} \cancel{-3}}{k}$$

$$= \lim_{k \to 0} \frac{\cancel{18} + 12k + 2k^2 + k \cancel{-18}}{k}$$

$$= \lim_{k \to 0} \frac{2k^2 + 13k}{k}$$

$$= \lim_{k \to 0} \frac{\cancel{k}(2k+13)}{\cancel{k}} = 13$$