Regüler Sturm-Liouville Problemi

$a<x<b$

$$\frac{d}{dx}\left[p(x)\frac{dy}{dx}\right]+q(x)y+\lambda r(x)y=0 \quad \wedge \quad (1)$$

diferansiyel denklemi ile

$$\left.\begin{aligned} a_1 y(a)+a_2 y'(a)=0 \\ b_1 y(b)+b_2 y'(b)=0 \end{aligned}\right\} \quad (2)$$

$y''+P(x)y'+Q(x)y=0$

$p'(x)\cdot\frac{dy}{dx}+p(x)y''+q(x)y+\lambda r(x)y=0$ $\quad (p(x)\neq 0)$

$p(x)y''+p'(x)y'+[q(x)+\lambda r(x)]y=0$

$$y''+\underbrace{\frac{p'(x)}{p(x)}}_{P(x,\lambda)}y'+\underbrace{\frac{q(x)+\lambda r(x)}{p(x)}}_{Q(x,\lambda)}y$$

ayrılabilir sınır koşullarıyla oluşan sınır değer problemini göz önüne alalım. Burada p, q ve r x'in reel fonksiyonları, λ x'den bağımsız bir parametre ve $a_1^2+a_2^2\neq 0$, $b_1^2+b_2^2\neq 0$ -dır.
(1)-(2) problemine Sturm-Liouville problemi (sistemi) denir.

Tanım: (1) denklemindeki $p(x)$, $p'(x)$, $q(x)$ ve $r(x)$ fonksiyonları $[a,b]$'de sürekli ve $p(x)>0$, $r(x)>0$ ise Sturm-Liouville problemine Regüler S-L problemi denir.

$C^2[a,b]$ den $C[a,b]$ 'ye

$$\ell(y)=-y''+q(x)y \qquad \ell: -\frac{d^2}{dx^2}+q(x)$$

dif. operatörünü gözönüne alalım. Burada $q(x)$, $[a,b]$'de reel değerli sürekli bir fonksiyondur ve ℓ bir lineer operatördür.

$y, z \in C^2[a,b] \qquad \alpha, \beta \in \mathbb{R}$

$$\ell(\alpha y+\beta z) = -(\alpha y+\beta z)'' + q(x)(\alpha y+\beta z)$$

$$= -\alpha y'' - \beta z'' + q(x)\alpha y + q(x)\beta z$$

$$= \alpha\left[-y'' + q(x)y\right] + \beta\left[-z'' + q(x)z\right]$$

$$= \alpha\,\ell(y) + \beta\,\ell(z)$$

$\ell(y)$ için esas sınır koşulları

I. $\cos\alpha\, y(a) + \sin\alpha\, y'(a) = 0$ $\qquad (\alpha, \beta \in \mathbb{R})$

$\cos\beta\, y(b) + \sin\beta\, y'(b) = 0$

II. $y(a) = y(b)$

$y'(a) = y'(b)$

Burada esas olarak; $\qquad \ell(y) = -y'' + q(x)y = \lambda y \qquad (3)$

dif. denklemi ve

$$\left.\begin{aligned} \cos\alpha\, y(a) + \sin\alpha\, y'(a) = 0 \\ \cos\beta\, y(b) + \sin\beta\, y'(b) = 0 \end{aligned}\right\} \qquad (4)$$

sınır koşullarıyla oluşturulan Regüler Sturm–Liouville problemini inceleyeceğiz.
$a=0$, $b=\pi$ almak suretiyle (3)-(4) problemini inceleyelim.

$\frac{x-a}{b-a}\cdot\pi=t$ denirse o zaman $[a,b]$ aralığı $[0,\pi]$'ye dönüşür.

$$x:=\frac{(b-a)t}{\pi}+a$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{dt}\cdot\frac{dt}{dx}=\frac{dy}{dt}\cdot\frac{1}{\frac{dx}{dt}}=\frac{dy}{dt}\cdot\frac{\pi}{b-a}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right)=\frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right)\cdot\frac{dt}{dt}=\frac{d}{dt}\left(\frac{dy}{dx}\right)\cdot\frac{1}{\frac{dx}{dt}}=\frac{d^2y}{dt^2}\left(\frac{\pi}{b-a}\right)^2$$

Regüler S-L probleminin özellikleri

$$\begin{cases} \ell(y)=-y''+q(x)y=\lambda y & (5)\\ \left.\begin{array}{l}\cos\alpha\, y(0)+\sin\alpha\, y'(0)=0\\ \cos\beta\, y(\pi)+\sin\beta\, y'(\pi)=0\end{array}\right\} & (6)\end{cases}$$

1.) Bir $\lambda=\lambda_1$ sayısı için sıfırdan farklı $y_1(x)\in C^2[0,\pi]$ fonksiyonu (5) sınır değer probleminin çözümü ise λ_1 sayısına problemin özdeğeri, bu özdeğere karşılık gelen $y_1(x)$ çözümüne de problemin özfonksiyonu (özvektörü) denir.

$D(L)$ ile $[0,\pi]$ aralığında tanımlı 2. mertebeden sürekli türevi olan ve (6) sınır koşullarını sağlayan fonksiyonların kümesini gösterelim. $D(L)$, $C[0,\pi]$ uzayının bir lineer manifoldudur.

2.) $\lambda_1\neq\lambda_2$ (5)-(6) sınır değer probleminin herhangi iki özdeğeri ve y_1, y_2'de sırasıyla bu özdeğerlere karşılık gelen özfonksiyonlar ise o zaman

$$\int_0^{\pi} y_1(x)\cdot y_2(x)\,dx=0 \Rightarrow y_1\perp y_2$$

İSPAT: f ve g $C^2[0,\pi]$ 'nin herhangi iki elemanı olsun. Kısmi integrasyondan yararlanarak;

$$\int_0^{\pi} f''(x).g(x)\,dx = f'(x).g(x)\Big|_0^{\pi} - \int_0^{\pi} f'(x).g'(x)\,dx = f'(\pi)g(\pi) - f'(0)g(0) - \left[f(x)g'(x)\Big|_0^{\pi} - \int_0^{\pi} f(x)g''(x)\,dx \right]$$

- $g(x)=u \Rightarrow g'(x)\,dx = du$

  $f''(x)\,dx = dv \Rightarrow f'(x) = v$

- $g'(x) = u \Rightarrow g''(x)\,dx = du$

  $f'(x)\,dx = dv \Rightarrow f(x) = v$

$$= f'(\pi)g(\pi) - f'(0)g(0) - \left(f(\pi)g'(\pi) - f(0)g'(0)\right) + \int_0^{\pi} f(x).g''(x)\,dx$$

$$= \left[f'(\pi)g(\pi) - f(\pi)g'(\pi)\right] + \left[f(0)g'(0) - f'(0)g(0)\right] + \int_0^{\pi} f(x).g''(x)\,dx$$

$$= W_0(f,g) - W_{\pi}(f,g) + \int_0^{\pi} f(x).g''(x)\,dx$$

$$W(f,g) = \begin{vmatrix} f & g \\ f' & g' \end{vmatrix} = fg' - gf'$$

$$\int_0^{\pi} \ell(y_1).y_2\,dx = \int_0^{\pi} \left[-y_1'' + q(x)y_1\right].y_2\,dx$$

$$= \int_0^{\pi} -y_1''y_2\,dx + \int_0^{\pi} q(x).y_1.y_2\,dx$$

$$= W_{\pi}(y_1,y_2) - W_0(y_1,y_2) + \int_0^{\pi} y_1.y_2''\,dx + \int_0^{\pi} q(x)y_1.y_2\,dx$$

$$= W_{\pi}(y_1,y_2) - W_0(y_1,y_2) + \int_0^{\pi} \left[-y_2'' + q(x)y_2\right]y_1\,dx = W_{\pi}(y_1,y_2) - W_0(y_1,y_2) + \int_0^{\pi} y_1.\ell(y_2)\,dx$$

$$W_0(y_1,y_2) = y_1(0)y_2'(0) - y_2(0)y_1'(0) \quad , \quad W_\pi(y_1,y_2) = y_1(\pi)y_2'(\pi) - y_2(\pi)y_1'(\pi)$$

$$y_i(0)\cos\alpha + y_i'(0)\sin\alpha = 0 \qquad y_i(0) = -y_i'(0)\tan\alpha$$

$$y_i(\pi)\cos\beta + y_i'(\pi)\sin\beta = 0 \qquad y_i(\pi) = -y_i'(\pi)\tan\beta$$

$$W_0(y_1,y_2) = -y_1'(0)\tan\alpha \cdot y_2'(0) - \left[-y_2'(0)\tan\alpha\right]\cdot y_1'(0) \quad , \quad W_\pi(y_1,y_2) = 0$$

$$= 0$$

$$\int_0^\pi y_2 \cdot \ell(y_1)\,dx = W_\pi(y_1,y_2) - W_0(y_1,y_2) + \int_0^\pi y_1 \cdot \ell(y_2)\,dx$$

$$\Rightarrow \int_0^\pi y_2\,\ell(y_1)\,dx = \int_0^\pi y_1\,\ell(y_2)\,dx \qquad \ell(y_1) = \lambda_1 y_1 \qquad \ell(y_2) = \lambda_2 y_2$$

$$\Rightarrow \int_0^\pi \lambda_1 y_1 y_2\,dx = \int_0^\pi \lambda_2 y_1 y_2\,dx$$

$$\Rightarrow \underbrace{(\lambda_1 - \lambda_2)}_{\neq 0} \int_0^\pi y_1 \cdot y_2\,dx = 0 \Rightarrow \int_0^\pi y_1 \cdot y_2\,dx = 0$$

Teorem : (Lagrange Özdeşliği)

u ve v, $[a,b]$ aralığında C^2 sınıfından iki fonksiyon olsun. O taktirde

$$u\ell(v) - v\ell(u) = \frac{d}{dx}\left[p(x)\cdot W(u,v)\right]$$

dir. $W(u,v)$, u ve v'nin Wronskianıdır.

İSPAT : $\ell(u) = \frac{d}{dx}\left[p(x)\frac{du}{dx}\right] + q(x)u$ $\qquad$ $\ell(v) = \frac{d}{dx}\left[p(x)\frac{dv}{dx}\right] + q(x)v$

$$= (p.u')' + q(x)u \qquad\qquad = (p(x).v')' + q(x)v$$

$$u\ell(v) - v\ell(u) = u.\left[(p(x).v')' + q(x)v\right] - v\left[(p(x)u')' + q(x)u\right]$$

$$= u(p(x)v')' + \cancel{q(x).u.v} - v.(p(x)u')' - \cancel{q(x)u.v}$$

$$= u(p(x)v')' - v(p(x)u')' + pu'v' - p.u'v'$$

$$= \left[u(p(x)v')' + u'(p(x)v')\right] - \left[v(p(x)u')' + v'(p(x)u')\right]$$

$$= \left[u.(p(x)v')\right]' - \left[v.(p(x)u')\right]'$$

$$= \left\{p(x)\left[uv' - vu'\right]\right\}' = \left[p(x).W(u,v)\right]'$$

Teorem : (Green Özdeşliği)

u ve v, $[a,b]$'de C^2 sınıfından iki fonksiyon olsun. Bu taktirde

$$\int_a^b \left[u\,\ell(v) - v\,\ell(u)\right] dx = p(x) \cdot W(u,v)\Big|_a^b$$

3) Regüler S-L probleminin özdeğerleri reel sayılardır.

İSPAT: λ_1, (5)-(6) probleminin bir özdeğeri ve $y_1(x)$ de bu özdeğere karşılık gelen özfonksiyon olsun. O halde

$$\ell(y_1) = -y_1'' + q(x)\,y_1 = \lambda_1 y_1$$

$$y_1(0)\cos\alpha + y_1'(0)\sin\alpha = 0$$

$$y_1(\pi)\cos\beta + y_1'(\pi)\sin\beta = 0$$

dır. Bu denklemin ve sınır koşullarının her iki tarafının kompleks eşleniğini alalım.

$$\ell(\overline{y_1}) = -\left[\overline{y_1}\right]'' + q(x)\,\overline{y_1} = \overline{\lambda_1}\,\overline{y_1}$$

$\overline{y_1} \leftarrow \overline{\lambda_1} = \lambda_2$ ($\overline{\lambda_1} = \lambda_2$ aldık)

$$\overline{y_1}(0)\cos\alpha + \overline{y_1}'(0)\sin\alpha = 0$$

$$\overline{y_1}(\pi)\cos\beta + \overline{y_1}'(\pi)\sin\beta = 0$$

$\ell(y_1) = -y_1'' + q(x) y_1 = \lambda_1 y_1$ denkleminin her iki tarafını $\bar{y}_1$ ile çarpıp, 0'dan π'ye integre edersek

$$\int_0^{\pi} \ell(y_1)\cdot \bar{y}_1 \, dx = \int_0^{\pi} (\lambda_1 y_1)\cdot \bar{y}_1 \, dx = \lambda_1 \int_0^{\pi} y_1 \cdot \bar{y}_1 \, dx = \lambda_1 \int_0^{\pi} |y_1|^2 dx .$$

Green özdeşliğinden

$$\int_0^{\pi} \ell(y_1)\cdot \bar{y}_1 \, dx = \int_0^{\pi} y_1 \, \ell[\bar{y}_1] \, dx$$

$$= \int_0^{\pi} y_1 \cdot \bar{\lambda}_1 \bar{y}_1 \, dx$$

$$= \bar{\lambda}_1 \int_0^{\pi} y_1 \bar{y}_1 \, dx$$

$$= \bar{\lambda}_1 \int_0^{\pi} |y_1|^2 dx .$$

$$\Rightarrow \lambda_1 \int_0^{\pi} |y_1|^2 dx = \bar{\lambda}_1 \int_0^{\pi} |y_1|^2 dx$$

$$\Rightarrow \lambda_1 = \bar{\lambda}_1 \Rightarrow \lambda_1 \text{ reeldir.}$$

NOT: y_1 aşikâr olmayan çözüm olduğundan $\int_0^{\pi} |y_1|^2 dx > 0$'dır.

4) Regüler S-L probleminin özdeğerleri monoton artan bir dizi teşkil eder.

Bu teorem, Regüler S-L probleminin sonsuz çoklukta özdeğerlere sahip olduğunu ve bu özdeğerlerin $\lim_{n\to\infty} \lambda_n \to \infty$ olmak üzere $\lambda_1 < \lambda_2 < \cdots < \lambda_n < \cdots$ şeklinde sıralanabileceğini ifade eder. Eğer y_n

λ_n özdeğerine karşılık gelen özfonksiyon ise, $y_1, y_2, \ldots, y_n, \ldots$ özfonksiyonları $[0,\pi]$ aralığında ortogonaldir. Yani

$$\int_0^{\pi} y_n(x) \cdot y_m(x)\, dx = 0 \qquad (n \neq m)$$

$$\int_0^{\pi} |y_n(x)|^2\, dx = k_n$$ olsun. $k_n > 0$ dir.

$$\Rightarrow \int_0^{\pi} \frac{1}{k_n} \cdot |y_n(x)|^2 dx = 1 \Rightarrow \int_0^{\pi} \Bigg[\underbrace{\frac{|y_n(x)|}{\sqrt{k_n}}}_{\varphi_n} \Bigg]^2 dx = 1. \qquad (n = 1, 2, \ldots)$$

$\{\varphi_n\} = \left\{ \dfrac{y_n}{\sqrt{k_n}} \right\}_{n=1}^{\infty}$ dizisine ortonormal özfonksiyon dizisi denir.

$\{y_n\} \rightarrow$ ortogonal öz fonk. dizisi

$\sqrt{k_n}$'e y_n'in normu denir.

$$\sqrt{k_n} = \|y_n\| = \sqrt{\int_0^{\pi} |y_n|^2 dx}$$

$\{\varphi_n\} = \left\{ \dfrac{y_n}{\|y_n\|} \right\} \rightarrow$ ortonormal öz fonk. dizisi

Ör/ $y'' + \lambda y = 0 \quad (0 < x < L)$

$y(0) = 0$

$y(L) = 0$

problemin in ortonormal öz fonksiyon sistemini bulunuz.

$\boxed{\lambda > 0}$

$k.D: r^2 + \lambda = 0 \Rightarrow r^2 = -\lambda \Rightarrow r_{1,2} = \mp\sqrt{\lambda}\, i$

$y = c_1 \cos\sqrt{\lambda}x + c_2 \sin\sqrt{\lambda}\, x$

$y(0) = 0 \Rightarrow c_1 = 0 \Rightarrow y = c_2 \sin\sqrt{\lambda}\, x$

$y(L) = 0 \Rightarrow \underbrace{c_2}_{\neq 0} \underbrace{\sin\sqrt{\lambda}L}_{=0} = 0 \Rightarrow \sin\sqrt{\lambda}L = 0 \Rightarrow \sqrt{\lambda}L = k\pi \quad (k = 0, \mp 1, \mp 2, \dots)$

$$\lambda = \frac{k^2\pi^2}{L^2}$$

$\lambda = \frac{k^2\pi^2}{L^2} \Rightarrow y_k = c_k \sin\frac{k\pi x}{L}$

$$\int_0^{\pi} c_k^2 \sin^2\frac{k\pi x}{L}\, dx = c_k^2 \int_0^{\pi} \frac{1 - \cos\frac{2k\pi x}{L}}{2}\, dx = \frac{c_k^2}{2}\left[x - \cancel{\frac{L}{2k\pi}\sin\frac{2k\pi x}{L}}^{\,0}\Big|_0^{\pi}\right] = \frac{c_k^2}{2}\cdot\pi$$

$$\varphi_k = \frac{y_k}{\|y_k\|} = \frac{\cancel{c_k}\sin\frac{k\pi x}{L}}{\cancel{c_k}\cdot\sqrt{\frac{\pi}{2}}} = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\sin\frac{k\pi x}{L}$$

$\lambda < 0 \quad \lambda = -\mu^2$

$$k.D: \; r^2 - \mu^2 = 0 \Rightarrow r^2 = \mu^2 \Rightarrow r_{1,2} = \mp \mu \Rightarrow y = c_1 e^{-\mu x} + c_2 e^{\mu x}$$

$$y(0) = 0 \Rightarrow \quad c_1 + c_2 = 0 \quad \Rightarrow c_1 = -c_2$$

$$y(L) = 0 \Rightarrow \quad c_1 e^{-\mu L} + c_2 e^{+\mu L} = 0$$

$$-c_2 e^{-\mu L} + c_2 e^{\mu L} = 0$$

$$c_2 \underbrace{\left(e^{\mu L} - e^{-\mu L}\right)}_{\neq 0} = 0 \quad \Rightarrow c_2 = 0 \rightarrow \text{sadece aşikâr çözüm}$$

$$\lambda = 0 \Rightarrow k.D: \; r^2 = 0 \Rightarrow r_{1,2} = 0 \Rightarrow y = A + Bx$$

$$\left.\begin{array}{l} y(0) = 0 \Rightarrow A = 0 \\ y(L) = 0 \Rightarrow B\underbrace{L}_{\neq 0} = 0 \\ \qquad B = 0 \end{array}\right\} \text{sadece aşikâr çözüm}$$

Teorem: $\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty}$, Regüler S_L probleminin ortonormal özfonksiyonlar dizisi olsun. Eğer, f $[a,b]$ de sürekli, f', $[a,b]$'de parçalı sürekli ve f sınır koşullarını sağlıyorsa f fonksiyonu $[a,b]$'de düzgün ve mutlak yakınsak

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty} c_n \varphi_n(x) \longrightarrow \int_a^b f(x)\cdot\varphi_m(x) = \int_a^b \sum_{n=1}^{\infty} c_n \cdot \varphi_n(x)\cdot\varphi_m(x)$$

seri açılımına sahiptir. c_n katsayıları

$$c_n=\int_a^b f(x)\cdot\varphi_n(x)\,dx$$

şeklinde hesaplanır.

Teorem: $\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty}$, Regüler S_L probleminin ortonormal özfonksiyonlar dizisi olsun. Eğer, f ve f' $[a,b]$'de parçalı sürekli ise bu taktirde (a,b) aralığındaki herhangi bir x için

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n\varphi_n(x) = \frac{1}{2}\left[f_+(x)+f_-(x)\right]$$

dir.

Ör/

$$f(x)=\begin{cases} \frac{2x}{\pi} & 0<x\leq\frac{\pi}{2} \\ 1 & \frac{\pi}{2}\leq x<\pi \end{cases}$$ fonksiyonunu

$$\left.\begin{array}{l} y''+\lambda y=0 \\ y(0)=0 \ , \ y'(\pi)=0 \end{array}\right\}$$ S-L probleminin özfonksiyonları cinsinden seriye açınız.

K.D: $r^2+\lambda=0$

1°) $\lambda<0 \Rightarrow \lambda=-\mu^2<0$

K.D: $r^2-\mu^2=0 \Rightarrow r^2=\mu^2 \Rightarrow r=\mp\mu$

$$\left.\begin{array}{l} y=c_1e^{-\mu x}+c_2e^{\mu x} \\ y'=-\mu c_1e^{-\mu x}+\mu c_2e^{\mu x} \end{array}\right\} \begin{array}{l} y(0)=0 \Rightarrow c_1+c_2=0 \Rightarrow c_1=-c_2 \\ y'(\pi)=0 \Rightarrow -\mu c_1e^{-\mu\pi}+\mu c_2e^{\mu\pi}=0 \end{array}$$

$$\underbrace{\mu c_2}_{\neq 0}\underbrace{\left[e^{-\mu\pi}+e^{\mu\pi}\right]}_{\neq 0}=0$$

$c_2=0 \Rightarrow c_1=0$

sadece aşikâr çözüm

2°) $\lambda=0 \Rightarrow r^2=0 \Rightarrow r_{1,2}=0$

$y=Ax+B$

$y'=A$

$y(0)=0 \Rightarrow B=0$

$y'(\pi)=0 \Rightarrow A=0$

sadece aşikar çözüm.

$3^\circ)$ $\lambda > 0 \Rightarrow \lambda = \mu^2 \Rightarrow$ K.D: $r^2 + \mu^2 = 0 \Rightarrow r^2 = -\mu^2 \Rightarrow r = \mp \mu i$

$y = c_1 \cos \mu x + c_2 \sin \mu x$ $\qquad y(0) = 0 \Rightarrow c_1 = 0$

$y' = -\mu c_1 \sin \mu x + c_2 \mu \cos \mu x$ $\qquad y'(\pi) = 0 \Rightarrow -\mu c_1 \sin \mu\pi + c_2 \mu \cos \mu\pi = 0 \Rightarrow \underbrace{c_2 \mu}_{\neq 0} \underbrace{\cos \mu\pi}_{=0} = 0$

$\cos \mu\pi = 0 \Rightarrow \mu\pi = \frac{(2k+1)\pi}{2} \quad (k = 0, \mp 1, \mp 2, \ldots)$

$\mu = \frac{2k+1}{2}$

$y = c_2 \sin \frac{(2k+1)x}{2}$

$x = u$ $\qquad \sin\left(\frac{2n+1}{2}\right)x \, dx = dv$

$dx = du$ $\qquad -\frac{2}{2n+1} \cos\left(\frac{2n+1}{2}\right)x = v$

$\|y\|^2 = \int_0^\pi c_2^2 \sin^2 \frac{(2k+1)x}{2} \, dx = c_2^2 \int_0^\pi \frac{1 - \cos(2k+1)x}{2} \, dx$

$= c_2^2 \left[\frac{x}{2} - \frac{1}{2(2k+1)} \sin(2k+1)x \Big|_0^\pi \right]$

$= c_2^2 \frac{\pi}{2} \Rightarrow \varphi_n = \frac{y}{\|y\|} = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sin \frac{(2n+1)x}{2}$

$f_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \cdot \varphi_n$ $\qquad c_n = \int_0^\pi f \cdot \varphi_n \, dx = \int_0^{\pi/2} \frac{2x}{\pi} \cdot \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sin\left(\frac{2n+1}{2}\right)x \, dx + \int_{\pi/2}^{\pi} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sin\left(\frac{2n+1}{2}\right)x \, dx$

$$c_n = \left(\frac{2}{\pi}\right)^{3/2}\left[-\frac{2x}{2n+1}\cos\frac{2n+1}{2}x\Big|_0^{\pi/2} + \frac{2}{2n+1}\int_0^{\pi/2}\cos\left(\frac{2n+1}{2}\right)x\,dx\right] + \sqrt{\frac{2}{\pi}}\cdot\left(-\frac{2}{2n+1}\right)\cos\frac{2n+1}{2}x\Big|_{\pi/2}^{\pi}$$

$$= \left(\frac{2}{\pi}\right)^{3/2}\left[\frac{4}{(2n+1)^2}\sin\left(\frac{2n+1}{2}\right)x\Big|_0^{\pi/2} + \frac{2\sqrt{2}}{\pi(2n+1)}\cos\frac{(2n+1)\pi}{4}\right.$$

$$= \frac{2^{7/2}}{\pi^{3/2}(2n+1)^2}\sin\frac{(2n+1)\pi}{4} + \frac{2^{3/2}}{\pi(2n+1)}\cos\frac{(2n+1)\pi}{4}$$

$$= \frac{2^{7/2}}{\pi^{3/2}(2n+1)^2}\sin\left(\frac{n\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right) \quad (n = 1, 2, \ldots)$$

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \cdot \varphi_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{7/2}}{\pi^{3/2}(2n+1)^2}\sin\left(\frac{n\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right)\cdot\sqrt{\frac{2}{\pi}}\sin\left(\frac{2n+1}{2}\right)x$$