Schwarz Teoremi (Karışık türevlerin eşitliği)

$z=f(x,y)$ fonksiyonu ve bu fonksiyonun $\frac{\partial f}{\partial x}$, $\frac{\partial f}{\partial y}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ kısmi türevleri bir $P(a,b)$ noktasında tanımlı ve sürekli iseler o zaman

$$\frac{\partial^2 f(a,b)}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f(a,b)}{\partial y \partial x}$$

dir.

İspatı için bir tanım ve bir yardımcı teoreme ihtiyaç vardır.

Tanım:

$z=f(x,y)$ fonksiyonunun tanımlı olduğu (a,b) noktasının komşuluğunda (a,b) noktasından itibaren x ve y değişkenleri üzerinde yapılan değişim miktarları

$$\Delta_x f(x,y) = f(a+\Delta x, b) - f(a,b)$$

$$\Delta_y f(x,y) = f(a, b+\Delta y) - f(a,b)$$

ile gösterilsin.

Yardımcı Teorem: Her fonksiyon için

$$\Delta x\, \Delta y\, f(x,y) = \Delta y\, \Delta x\, f(x,y)$$

dir.

İspat:

$$\Delta y\, f(x,y) = f(a, b+\Delta y) - f(a,b)$$

$$\Delta x\, \Delta y\, f(x,y) = \Delta x\left[f(a, b+\Delta y) - f(a,b)\right]$$

$$= \Delta x\left[f(a, b+\Delta y)\right] - \Delta x\left[f(a,b)\right]$$

$$= \left[f(a+\Delta x, b+\Delta y) - f(a, b+\Delta y)\right] - \left[f(a+\Delta x, b) - f(a,b)\right]$$

$$= f(a+\Delta x, b+\Delta y) - f(a, b+\Delta y) - f(a+\Delta x, b) + f(a,b) \quad (1)$$

$$\Delta x\, f(x,y) = f(a+\Delta x, b) - f(a,b)$$

$$\Delta y\, \Delta x\, f(x,y) = \Delta y\left[f(a+\Delta x, b) - f(a,b)\right]$$

$$= \Delta y\left[f(a+\Delta x, b)\right] - \Delta y\left[f(a,b)\right]$$

$$= \left[f(a+\Delta x, b+\Delta y) - f(a+\Delta x, b)\right] - \left[f(a, b+\Delta y) - f(a,b)\right]$$

$$= f(a+\Delta x, b+\Delta y) - f(a+\Delta x, b) - f(a, b+\Delta y) + f(a,b) \quad (2)$$

$$(1) = (2)$$

$z=f(x,y)$ fonksiyonunun x değişkenine a noktasından itibaren (a,b) noktasının komşuluğu içinde bir Δx artımı verelim.

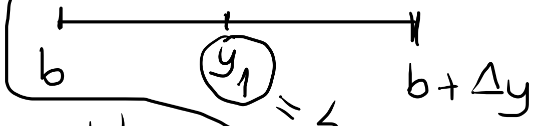
$$\Delta_x f(x,y) = f(a+\Delta x, y) - f(a,y) = h(y) \qquad (*)$$

$h(y)$ fonksiyonuna (a,b) noktasının komşuluğu içinde b noktasından itibaren Δy artımı verelim

$$\Delta_y h(y) = \Delta_y \Delta_x f(x,y) = h(b+\Delta y) - h(b)$$

$h(y)$ için elde edilen bu artıma tek değişkenli fonk. için ortalama değer teoremini uygulayabiliriz. Çünkü $h(y) = \Delta_x f(x,y)$ fonksiyonu (a,b) noktasının komşuluğu içindeki $[b, b+\Delta y]$ kapalı aralığında sürekli ve türeve sahiptir.

O halde $b < y_1 < b+\Delta y$ olan en az bir y_1 değeri için



$y_1 = b+\theta_1 \Delta y$ $\quad 0<\theta_1<1$

$$\frac{h(b+\Delta y)-h(b)}{\cancel{b}+\Delta y-\cancel{b}} = h'(y_1) \Rightarrow h(b+\Delta y)-h(b) = \Delta y . h'(y_1)$$

dir. Veya $0<\theta_1<1$ olmak üzere $y_1 = b+\theta_1 \Delta y$ alırsak;

$$h(b+\Delta y)-h(b) = \Delta y\, h'(b+\theta_1 \Delta y)$$

(*)'dan türev alırsak;

$$h'(y) = f'_y(a+\Delta x, y) - f'_y(a,y) \quad \text{dir.}$$

$$\Rightarrow \quad h'(b+\theta_1 \Delta y) = f'_y(a+\Delta x, b+\theta_1 \Delta y) - f'_y(a, b+\theta_1 \Delta y)$$

$$\Rightarrow \quad h(b+\Delta y)-h(b) = [\underbrace{f'_y(a+\Delta x, b+\theta_1 \Delta y) - f'_y(a, b+\theta_1 \Delta y)}] . \Delta y$$

Bu ifade $f'_y(x, b+\theta_1 \Delta y)$ fonksiyonunun (a,b) noktasının komşuluğunda $[a, a+\Delta x]$ aralığındaki bir artımıdır.

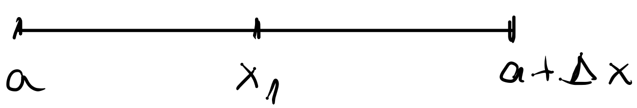
Hipotez gereği $f'_y(x, b+\theta_1 \Delta y)$ fonksiyonu bu aralıkta tanımlı ve sürekli olduğundan ve de türeve sahip olduğundan ortalama değer teoremi uygula-nabilir.

$a < x_1 < a+\Delta x$ olan en az bir x_1 değeri için $f'_y(x, b+\theta_1\Delta y)$

$$\frac{f'_y(a+\Delta x, b+\theta_1\Delta y) - f'_y(a, b+\theta_1\Delta y)}{\cancel{a}+\Delta x - \cancel{a}} = \left[\frac{\partial}{\partial x} f'_y(x_1, b+\theta_1\Delta y)\right]$$

$$f'_y(a+\Delta x, b+\theta_1\Delta y) - f'_y(a, b+\theta_1\Delta y) = f''_{yx}(x_1, b+\theta_1\Delta y) \cdot \Delta x$$

$$\Rightarrow h(b+\Delta y) - h(b) = \left[f''_{yx}(x_1, b+\theta_1\Delta y) \cdot \Delta x\right] \Delta y$$



$0<\theta_2<1 \Rightarrow x_1 = a+\theta_2\Delta x \Rightarrow h(b+\Delta y)-h(b) = \Delta y\Delta x f(x,y) = f''_{yx}(a+\theta_2\Delta x, b+\theta_1\Delta y)\cdot \Delta x\Delta y$

Benzer işlemlerle $\Delta x \Delta y f(x,y)$ için de $0<\theta_3<1$, $0<\theta_4<1$ olmak üzere

$$\Delta x \Delta y f(x,y) = f''_{xy}(a+\theta_3\Delta x, b+\theta_4\Delta y) \cdot \Delta y \Delta x$$ elde edilir.

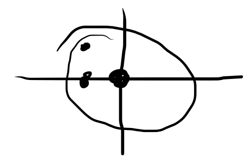
Yardımcı teoreme göre $\Delta x \Delta y\, f(x,y) = \Delta y \Delta x\, f(x,y)$ olduğundan;

$$f''_{yx}(a+\theta_2 \Delta x, b+\theta_1 \Delta y)\, \Delta x \Delta y = f''_{xy}(a+\theta_3 \Delta x, b+\theta_4 \Delta y)\, \Delta y \Delta x$$

$$\left.\begin{matrix} \Delta x \to 0 \\ \Delta y \to 0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow f''_{yx}(a,b) = f''_{xy}(a,b)$$

Teorem daha yüksek mertebeden türevler içinde geçerlidir.

$$\frac{\partial^3 f}{\partial x^2 \partial y} = \frac{\partial^3 f}{\partial y \partial x^2} = \frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y \partial x}$$



ör

$$f(x,y) = \begin{cases} 2xy \cdot \dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2} & x^2+y^2 \neq 0 \\ 0 & x=y=0 \end{cases}$$

$f(0,0)$

fonksiyonunun Schwarz teoremini sağlayıp sağlamadığını gösteriniz.

$$f'_x(0,0) = \left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{(0,0)} = \lim_{h\to 0} \frac{f(0+h,0) - f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0}\left(0 \cdot \frac{h^2}{h^2}\right) = 0$$

$$f'_y(0,0) = \left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{(0,0)} = \lim_{k\to 0} \frac{f(0,0+k) - f(0,0)}{k} = \lim_{k\to 0}\left(0 \cdot \frac{-k^2}{k^2}\right) = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2y \cdot \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} + 2xy \cdot \left[\frac{2x(x^2+y^2) - 2x(x^2-y^2)}{(x^2+y^2)^2}\right]$$

$$= 2y\, \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} + 2xy \cdot \frac{4xy^2}{(x^2+y^2)^2}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 2x\, \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} - 2xy \cdot \frac{4yx^2}{(x^2+y^2)^2}$$

$$f''_{xy}(0,0) = \lim_{k \to 0} \frac{f'_x(0,0+k) - f'_x(0,0)}{k}$$

$$= \lim_{k \to 0} \frac{2k \cdot \frac{-\cancel{k^2}}{\cancel{k^2}} + 0 \cdot \frac{0}{k^4} - 0}{k} = -2$$

$$\neq$$

$$f''_{yx}(0,0) = \lim_{h \to 0} \frac{f'_y(0+h,0) - f'_y(0,0)}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{2h \cdot \frac{\cancel{h^2}}{\cancel{h^2}} - 0 \cdot \frac{0}{h^4} - 0}{h} = 2$$