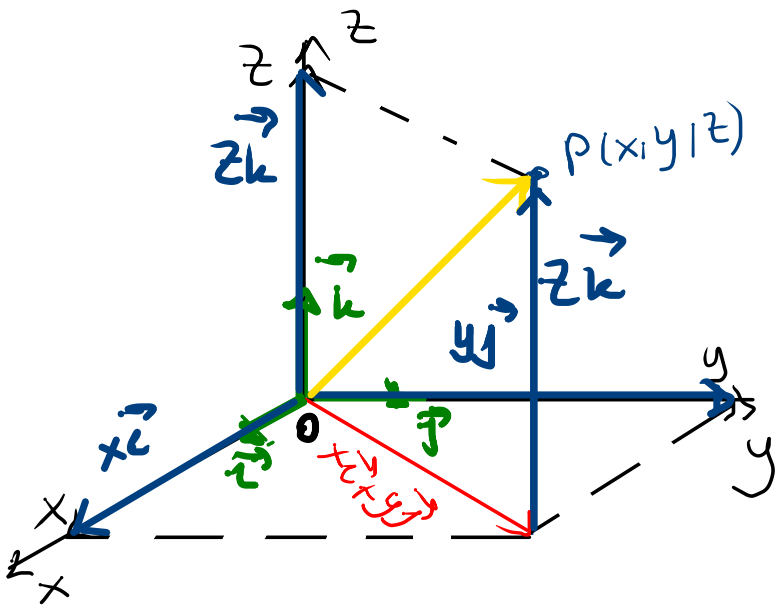
Vektör Değerli Fonksiyonlar

Üç boyutlu uzayda (x,y,z) noktasının yer vektörü $\vec{OP} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ şeklindedir.



Eğer $\vec{OP}$ vektörünün bileşenleri olan x, y ve z değişim aralığı $[a,b]$ olan bir t değişkeninin fonksiyonu iseler o zaman $\vec{OP}$ vektörü t değişkeninin bir vektör değerli fonksiyonu olur.

$$\left.\begin{array}{l} x = x(t) \\ y = y(t) \\ z = z(t) \end{array}\right\} \quad \vec{OP}(t) = \vec{r}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k}$$

t'nin $[a,b]$ kapalı aralığında aldığı her değer için P noktası değişir ve $\vec{OP}$ yer vektörü her bir değer için farklı bir noktayı temsil eder. Tüm bu P noktalarının kümesi uzayda bir eğri oluşturur ve $\vec{r}(t)$ vektör değerli fonksiyonu bu oluşan eğrinin vektörel denklemini ifade eder.

Vektörel Limit.

$\vec{r}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k}$ vektör değerli fonksiyon, t_0 herhangi bir sayı olsun.
Eğer $\vec{l} = l_1\vec{i} + l_2\vec{j} + l_3\vec{k}$ vektörü için

$\lim\limits_{t\to t_0} \vec{r}(t) = \vec{l}$ oluyorsa $\vec{r}$'nin $t \to t_0$ için limiti $\vec{l}$'dir denir.

$\varepsilon > 0$ verildiğinde $|t - t_0| < \delta$ iken $|\vec{r}(t) - \vec{\ell}| < \varepsilon$ olacak şekilde bir $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ sayısı bulunabiliyorsa $t \to t_0$ iken $\vec{r}(t)$'nin limiti $\vec{\ell}$'dir denir.

$$\lim_{t\to t_0} \vec{r}(t) = \lim_{t\to t_0} \left[x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k}\right] = \left[\lim_{t\to t_0} x(t)\right]\vec{i} + \left[\lim_{t\to t_0} y(t)\right]\vec{j} + \left[\lim_{t\to t_0} z(t)\right]\vec{k}$$

$$= \ell_1\vec{i} + \ell_2\vec{j} + \ell_3\vec{k}$$

$$\lim_{t\to t_0} x(t) = \ell_1, \quad \lim_{t\to t_0} y(t) = \ell_2, \quad \lim_{t\to t_0} z(t) = \ell_3$$

Limit kuralları

$\lim_{t\to t_0} \vec{r}(t) = \vec{a}$ $\quad \lim_{t\to t_0} \vec{R}(t) = \vec{b}$ ve $\lambda \in \mathbb{R}$ olmak üzere

1. $\lim_{t\to t_0} \left[\vec{r}(t) \mp \vec{R}(t)\right] = \lim_{t\to t_0} \vec{r}(t) \mp \lim_{t\to t_0} \vec{R}(t) = \vec{a} \mp \vec{b}$

2. $\lim_{t\to t_0} \left[\vec{r}(t) \cdot \vec{R}(t)\right] = \left[\lim_{t\to t_0} \vec{r}(t)\right] \left[\lim_{t\to t_0} \vec{R}(t)\right] = \vec{a} \cdot \vec{b}$

3. $\lim_{t\to t_0} \left[\lambda \cdot \vec{r}(t)\right] = \lambda \left[\lim_{t\to t_0} \vec{r}(t)\right] = \lambda\vec{a}$

4. $\lim_{t\to t_0} \left[\vec{r}(t) \times \vec{R}(t)\right] = \left[\lim_{t\to t_0} \vec{r}(t)\right] \times \left[\lim_{t\to t_0} \vec{R}(t)\right]$

$$= \vec{a} \times \vec{b}$$

Vektörel Süreklilik

$\vec{r}(t)$, $[a,b]$ aralığında tanımlı vektör değerli bir fonksiyon olsun. Eğer

$\lim_{t\to t_0} \vec{r}(t) = \vec{r}(t_0)$ oluyorsa, $\vec{r}(t)$ t_0 noktasında süreklidir denir.

$$\lim_{t\to t_0} \vec{r}(t) = \lim_{t\to t_0} \left[x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k} \right]$$

$$= \underbrace{\left[\lim_{t\to t_0} x(t)\right]}\vec{i} + \left[\lim_{t\to t_0} y(t)\right]\vec{j} + \left[\lim_{t\to t_0} z(t)\right]\vec{k}$$

$$= x(t_0)\,\vec{i} + y(t_0)\vec{j} + z(t_0)\,\vec{k}$$

$$= \vec{r}(t_0)$$

Vektörel Türev

$\vec{r}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k}$ vektör değerli fonksiyonunun türevi tek değişkenli fonksiyonun türevine benzer olarak tanımlanabilir.

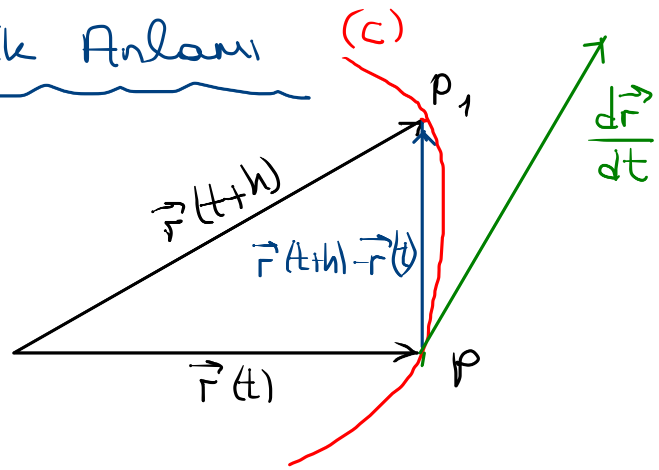
$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \lim_{h\to 0} \frac{\vec{r}(t+h) - \vec{r}(t)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\left[x(t+h)\vec{i} + y(t+h)\vec{j} + z(t+h)\vec{k}\right] - \left[x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k}\right]}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \left\{ \frac{[x(t+h)-x(t)]\vec{i} + [y(t+h)-y(t)]\vec{j} + [z(t+h)-z(t)]\vec{k}}{h} \right\}$$

$$= \lim_{h\to 0} \left\{ \left[\frac{x(t+h)-x(t)}{h}\right]\vec{i} + \left[\frac{y(t+h)-y(t)}{h}\right]\vec{j} + \left[\frac{z(t+h)-z(t)}{h}\right]\vec{k} \right\}$$

$$= \frac{dx}{dt}\vec{i} + \frac{dy}{dt}\vec{j} + \frac{dz}{dt}\vec{k}$$

Geometrik Anlamı



$\vec{r}(t)$ vektör değerli fonksiyonunun t değişkeninin h artımına karşılık olan artımı

$\Delta\vec{r} = \vec{r}(t+h) - \vec{r}(t)$ olup $\overrightarrow{PP_1}$ vektörü bulunur.

$\frac{\Delta\vec{r}}{h}$ oranı gözönüne alınırsa bu vektör $\Delta\vec{r}$ vektörü ile aynı doğru üzerinde olup $\Delta\vec{r}$'yi $\frac{1}{h}$ ile çarparak elde edilmiştir. Eğer $\vec{r}(t)$ vektörünün bileşenlerinin türevleri mevcut iseler o zaman $\frac{\Delta\vec{r}}{h}$ vektörünün bileşenlerinin $h\to 0$ iken limit değerleri $\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt}$'ye yaklaşacaktır. Buna göre $h\to 0$ iken $\frac{\Delta\vec{r}}{h}$ limite sahip olur. Elde edilen bu limit vektöre $\vec{r}(t)$ vektör değerli fonksiyonunun türevi denir ve bu türev fonksiyonu eğrinin P noktasındaki teğet doğrultusundaki vektörü verir.

$$\vec{T} = \frac{\frac{d\vec{r}}{dt}}{\left|\frac{d\vec{r}}{dt}\right|} \rightarrow \text{Teğet birim vektör}$$

$\frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{v} \rightarrow$ hız vektörü

$|\vec{v}| \rightarrow$ hız.

Türev kuralları

$\vec{r}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k}$, $\vec{R}(t) = X(t)\vec{i} + Y(t)\vec{j} + Z(t)\vec{k}$, $\lambda(t) \rightarrow$ skalar fonksiyon

1°) $\frac{d}{dt}\left[\vec{r}(t) \mp \vec{R}(t)\right] = \frac{d\vec{r}(t)}{dt} \mp \frac{d\vec{R}(t)}{dt}$

2°) $\frac{d}{dt}\left[\vec{r}(t) \cdot \vec{R}(t)\right] = \frac{d\vec{r}}{dt} \cdot \vec{R}(t) + \vec{r}(t) \cdot \frac{d\vec{R}}{dt}$

3°) $\frac{d}{dt}\left[\lambda(t) \cdot \vec{r}(t)\right] = \frac{d\lambda}{dt} \cdot \vec{r}(t) + \frac{d\vec{r}}{dt} \cdot \lambda(t)$

4°) $\frac{d}{dt}\left[\vec{r}(t) \times \vec{R}(t)\right] = \left[\frac{d\vec{r}}{dt} \times \vec{R}(t)\right] + \left[\vec{r}(t) \times \frac{d\vec{R}}{dt}\right]$

2. mertebe türev: $\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \frac{d^2x}{dt^2}\vec{i} + \frac{d^2y}{dt^2}\vec{j} + \frac{d^2z}{dt^2}\vec{k} = \vec{a} \rightarrow$ ivme vektörü

$|\vec{a}| = a \rightarrow$ ivme

Örnekler : 1) $\vec r(t) = (t^3+2t)\vec i - 3e^{-2t}\vec j + 2\sin 5t\,\vec k$ ise $t=0$ için $\frac{d\vec r}{dt}$, $\left|\frac{d\vec r}{dt}\right|$, $\frac{d^2\vec r}{dt^2}$, $\left|\frac{d^2\vec r}{dt^2}\right|$ 'nü hesaplayınız.

$$\frac{d\vec r}{dt} = (3t^2+2)\vec i + 6e^{-2t}\vec j + 10\cos 5t\,\vec k \Rightarrow \left.\frac{d\vec r}{dt}\right|_{t=0} = 2\vec i + 6\vec j + 10\vec k$$

$$\left|\left.\frac{d\vec r}{dt}\right|_{t=0}\right| = \sqrt{2^2+6^2+10^2} = \sqrt{140}$$

$$\frac{d^2\vec r}{dt^2} = 6t\,\vec i - 12e^{-2t}\vec j - 50\sin 5t\,\vec k \Rightarrow \left.\frac{d^2\vec r}{dt^2}\right|_{t=0} = -12\vec j$$

$$\left|\left.\frac{d^2\vec r}{dt^2}\right|_{t=0}\right| = \sqrt{(-12)^2} = 12$$

2) $\vec r(t) = 5t^2\vec i + t\vec j - t^3\vec k$, $\vec R(t) = \sin t\,\vec i - \cos t\,\vec j$

$$\frac{d}{dt}\left[\vec r(t)\cdot\vec R(t)\right] = \left[10t\vec i + \vec j - 3t^2\vec k\right]\left[\sin t\,\vec i - \cos t\,\vec j\right] + \left[\cos t\,\vec i + \sin t\,\vec j\right]\left[5t^2\vec i + t\vec j - t^3\vec k\right]$$

$$= 10t\sin t - \cos t + 5t^2\cos t + t\sin t$$

$$= 11t\sin t + (5t^2-1)\cos t$$

3) $\left.\begin{aligned} x &= 3\cos t \\ y &= 3\sin t \\ z &= 4t \end{aligned}\right\}$ eğrisinin $\vec{T}$ teğet birim vektörünü bulunuz.

$$\vec{r}(t) = 3\cos t\,\vec{i} + 3\sin t\,\vec{j} + 4t\,\vec{k}$$

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = -3\sin t\,\vec{i} + 3\cos t\,\vec{j} + 4\vec{k}$$

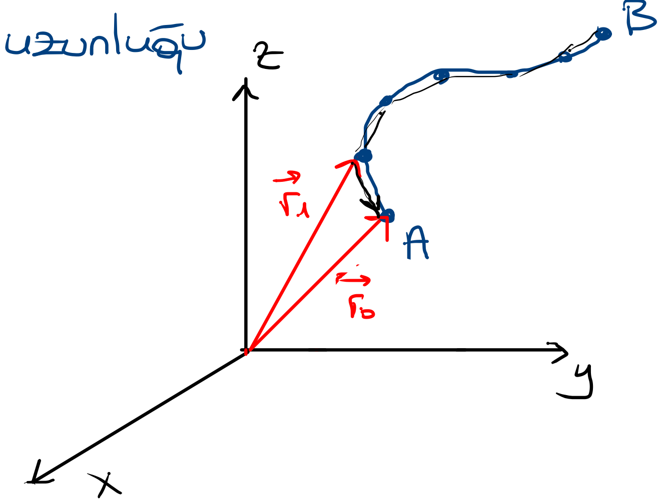
$$\left|\frac{d\vec{r}}{dt}\right| = \sqrt{9\sin^2 t + 9\cos^2 t + 16} = 5$$

$$\vec{T} = \frac{\frac{d\vec{r}}{dt}}{\left|\frac{d\vec{r}}{dt}\right|} = \frac{-3\sin t\,\vec{i} + 3\cos t\,\vec{j} + 4\vec{k}}{5}$$

$$= -\frac{3}{5}\sin t\,\vec{i} + \frac{3}{5}\cos t\,\vec{j} + \frac{4}{5}\vec{k}$$

NOT: Eğer $\vec{r}(t)$ vektör değerli fonksiyonu tanım kümesinin her noktasında türevlenebilir ise türevlenebilir fonksiyon adını alır. Eğer türev fonksiyonu sürekli ise ve asla sıfır olmuyorsa $\vec{r}(t)$ tarafından oluşan eğri düzgün eğridir.

Yay uzunluğu



$$\Delta\vec{r}_i = \vec{r}_i - \vec{r}_{i-1}$$

$$\Delta t_i = t_i - t_{i-1}$$

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} \left|\vec{r}_i - \vec{r}_{i-1}\right| = \sum_{i=1}^{n} \left|\vec{r}_i - \vec{r}_{i-1}\right| \cdot \frac{|\Delta t_i|}{|\Delta t_i|} = \sum_{i=1}^{n} \left|\frac{\Delta\vec{r}_i}{\Delta t_i}\right| \cdot |\Delta t_i|$$

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \left|\frac{\Delta\vec{r}_i}{\Delta t_i}\right| \cdot |\Delta t_i| = \int_A^B \left|\frac{d\vec{r}}{dt}\right| \cdot dt$$

$$\lim_{n\to\infty} S_n = S = \int_A^B \underbrace{\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2+\left(\frac{dz}{dt}\right)^2}\, dt}_{ds \to \text{yay diferansiyeli}}$$

Ör/ $\vec{r}(t) = \underbrace{a\cos t}_{x}\,\vec{i} + \underbrace{a\sin t}_{y}\,\vec{j} + \underbrace{bt}_{z}\,\vec{k}$ dairesel helisinin $(a,0,0)$ ve $(a,0,2\pi b)$ noktaları arasındaki kısmının uzunluğunu bulunuz.

$(a,0,0)$

$$\left.\begin{aligned} a &= a\cos t \\ 0 &= a\sin t \\ 0 &= bt \end{aligned}\right\} \quad \left.\begin{aligned} \cos t = 1 &\Rightarrow t = 0, \mp 2\pi, \mp 4\pi, \dots \\ \sin t = 0 &\Rightarrow t = 0, \mp\pi, \mp 2\pi, \dots \\ t = 0 &\Rightarrow t = 0 \end{aligned}\right\} t_1 = 0$$

$(a,0,2\pi b)$

$$\left.\begin{aligned} a &= a\cos t \\ 0 &= a\sin t \\ 2\pi b &= bt \end{aligned}\right\} \quad \left.\begin{aligned} \cos t = 1 &\Rightarrow t = 0, \mp 2\pi, \mp 4\pi, \dots \\ \sin t = 0 &\Rightarrow t = 0, \mp\pi, \mp 2\pi, \dots \\ t = 2\pi &\Rightarrow t = 2\pi \end{aligned}\right\} t_2 = 2\pi$$

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = -a\sin t\,\vec{i} + a\cos t\,\vec{j} + b\,\vec{k} \Rightarrow S = \int_0^{2\pi} \sqrt{a^2\sin^2 t + a^2\cos^2 t + b^2}\, dt = \sqrt{a^2+b^2}\int_0^{2\pi} dt$$

$$= 2\pi\sqrt{a^2+b^2}$$

Bir Skaler Alanın Gradyeni

$z=f(x,y)$ iki değişkenli fonksiyonun birinci mertebe kısmi türevlerinin mevcut olduğu herhangi bir (x,y) noktasında gradyen vektörü

$$\text{grad } f = \nabla f(x,y) = \frac{\partial f}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial f}{\partial y}\vec{j} \quad \rightarrow \text{düzlemde.}$$

Nabla

$$u=f(x,y,z) \Rightarrow \nabla f = \text{grad } f = \frac{\partial f}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial f}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial f}{\partial z}\vec{k} \rightarrow \text{uzayda } (\mathbb{R}^3)$$

vektörel diferansiyel operatör.

Cebirsel kurallar $f(x,y)$, $g(x,y)$ fonk. için

1) $\nabla(f \mp g) = \nabla f \mp \nabla g$
2) $\nabla(f \cdot g) = \nabla f \cdot g + \nabla g \cdot f$
3) $\nabla\left(\frac{f}{g}\right) = \frac{\nabla f \cdot g - \nabla g \cdot f}{g^2}$

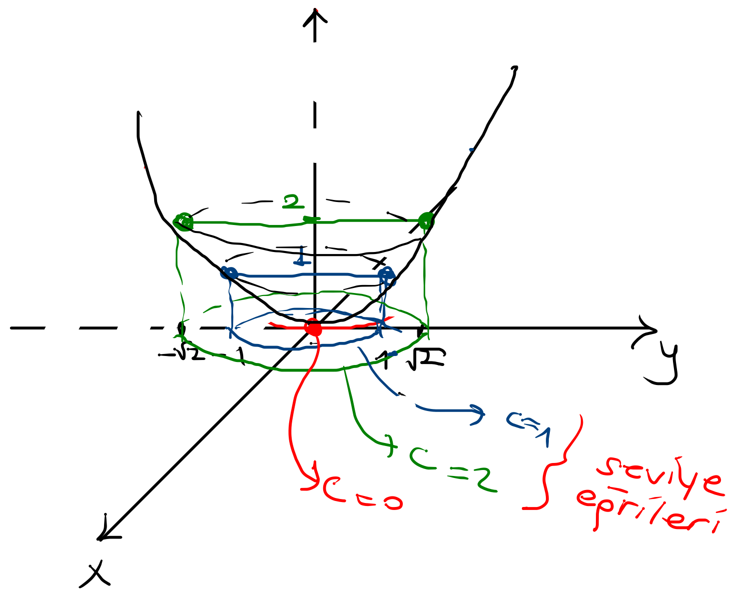
Ör/ $f(x,y)=x^2y+xy^2$ fonksiyonunun $(1,-2)$ noktasındaki gradyen vektörünü bulunuz.

$$\nabla f(x,y) = (2xy+y^2)\vec{i} + (x^2+2xy)\vec{j}$$

$$\nabla f(1,-2) = (-4+4)\vec{i} + (1-4)\vec{j} = -3\vec{j}$$

Teorem: Eğer $f(x,y)$ fonksiyonu (a,b) noktasında türevlenebilir ve $\nabla f(a,b) \neq 0$ ise o zaman $\nabla f(a,b)$ vektörü fonksiyonun (a,b) noktasından geçen seviye eğrisinin normal vektörüdür.

NOT: $z = x^2+y^2$



$z = c$

$c = 0 \quad = x^2+y^2$

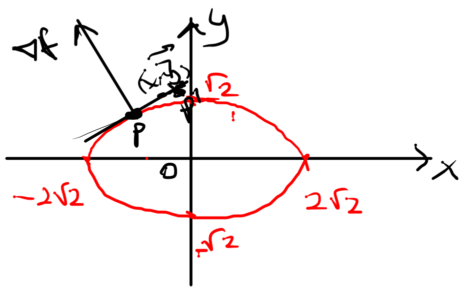
$c = 1 \quad = x^2+y^2$

$c = 2 \quad = x^2+y^2$

Ör/ $\frac{x^2}{4}+y^2=2$ elipsinin $(-2,1)$ noktasındaki teğet doğrusunun denklemini bulunuz.

$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \rightarrow$ Elips $\qquad \frac{x^2}{8}+\frac{y^2}{2}=1 \qquad f(x,y)=\frac{x^2}{8}+\frac{y^2}{2}-1$

Teğet üzerinde bir $P'(x,y)$ noktası alalım



$$\nabla f = \frac{\partial f}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial f}{\partial y}\vec{j} = \frac{x}{4}\vec{i} + y\vec{j}$$

$$\nabla f(-2,1) = -\frac{1}{2}\vec{i} + \vec{j}$$

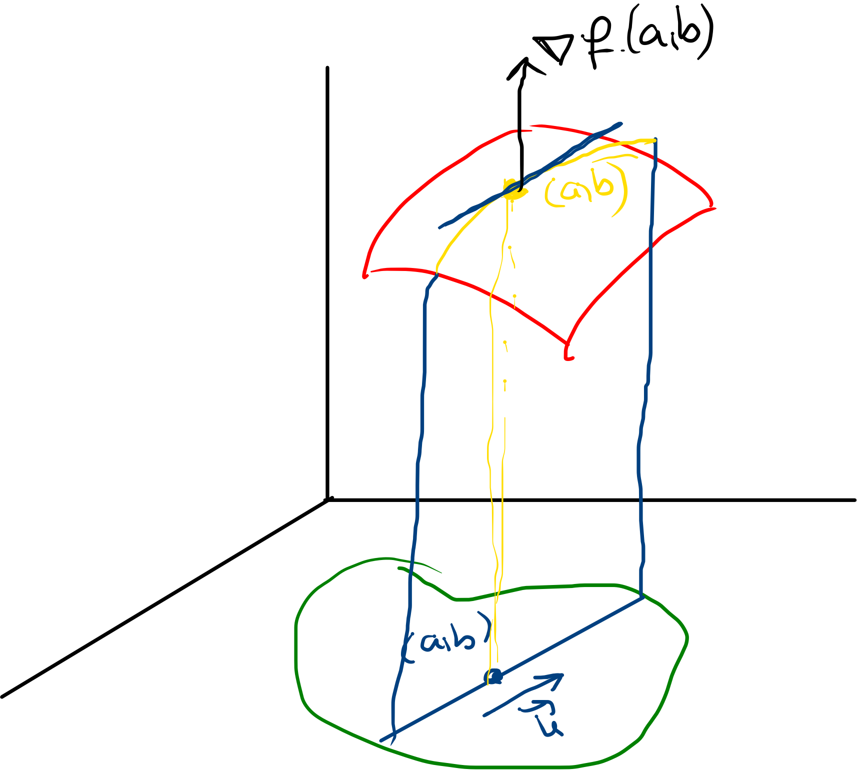
$$\overrightarrow{PP'} = (x+2)\vec{i} + (y-1)\vec{j}$$

$\nabla f \cdot \overrightarrow{PP'} = 0$ olmalı (Diklikten)

$$\Rightarrow -\frac{1}{2}(x+2) + (y-1) = 0$$

Teğet doğ. denk.

$$x+2-2y+2=0 \Rightarrow \boxed{x-2y=-4}$$



$$\underbrace{D_{\vec{u}} f(a,b)}_{\substack{\vec{u} \text{ vektörü} \\ \text{doğrultusundaki} \\ \text{türevi}}} = \nabla f(a,b) \cdot \underset{\substack{\downarrow \\ \text{birim} \\ \text{vektör olmalı.}}}{\vec{u}}$$