Diferansiyellenebilirlik.

Bir $f(x,y)$ fonksiyonu

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{f(a+h,b+k)-f(a,b)-h\,f_x(a,b)-k\,f_y(a,b)}{\sqrt{h^2+k^2}}=0$$

eşitliği sağlanıyorsa (a,b) noktasında diferansiyellenebilirdir denir.

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f_x(x,y)=f_x(0,0)\\ \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f_y(x,y)=f_y(0,0)\end{array}\right\}\text{ süreklilik}$$

Teorem: f_x ve f_y kısmi türevleri (a,b) noktasında sürekli iseler f fonksiyonu bu noktada diferansiyellenebilirdir.

Ör/ $f(x,y)=x^3+xy^2$ fonksiyonunun $(0,0)$ noktasında diferansiyellenebilir olup olmadığını inceleyiniz.

$f_x=3x^2+y^2 \qquad f_y=2xy$

$f'_x(x,y)=3x^2+y^2 \quad f'_y(x,y)=2xy$

$\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f'_x(x,y)=\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} 3x^2+y^2=0=$

$$f_x(0,0)=\lim_{h\to0}\frac{f(0+h,0)-f(0,0)}{h}=\lim_{h\to0}\frac{h^3-0}{h}=0$$

$\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f'_y(x,y)=\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} 2xy=0=$

$$f_y(0,0)=\lim_{k\to0}\frac{f(0,0+k)-f(0,0)}{k}=\lim_{k\to0}\frac{0-0}{k}=0$$

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)}\frac{f(0+h,0+k)-f(0,0)-h\,f_x(0,0)-k\,f_y(0,0)}{\sqrt{h^2+k^2}}=\lim_{(h,k)\to(0,0)}\frac{h^3+hk^2-0-h\cdot0-k\cdot0}{\sqrt{h^2+k^2}}$$

$$=\lim_{(h,k)\to(0,0)}\frac{h^3+hk^2}{\sqrt{h^2+k^2}}\overset{\frac{0}{0}}{=}\lim_{(h,k)\to(0,0)}\frac{h\,(h^2+k^2)}{\sqrt{h^2+k^2}}=\lim_{(h,k)\to(0,0)} h\cdot\sqrt{h^2+k^2}=0 \Rightarrow$$

$f(x,y)$, $(0,0)$ da diferansiyellenebilirdir.

Çok Değişkenli Fonksiyonlarda Maksimum - Minimum

Bir D bölgesinde tanımlı ve sürekli olan $z = f(x,y)$ fonksiyonunu göz önüne alalım. $(a,b) \in D$ olsun.
h ve k yeter derecede küçük seçilebilen iki sayı olmak üzere, (a,b) noktasının

$$|x-a| < h \quad , \quad |y-b| < k$$

civarındaki tüm (x,y) noktaları için $f(x,y) < f(a,b)$ veya diğer bir ifadeyle
$f(a+h, b+k) < f(a,b)$ oluyorsa $f(a,b)$'ye yerel (izafi) maksimum değeri denir. Benzer şekilde

$f(x,y) > f(a,b)$ veya $f(a+h, b+k) > f(a,b)$ oluyorsa da $f(a,b)$'ye yerel (izafi) minimum değer denir.

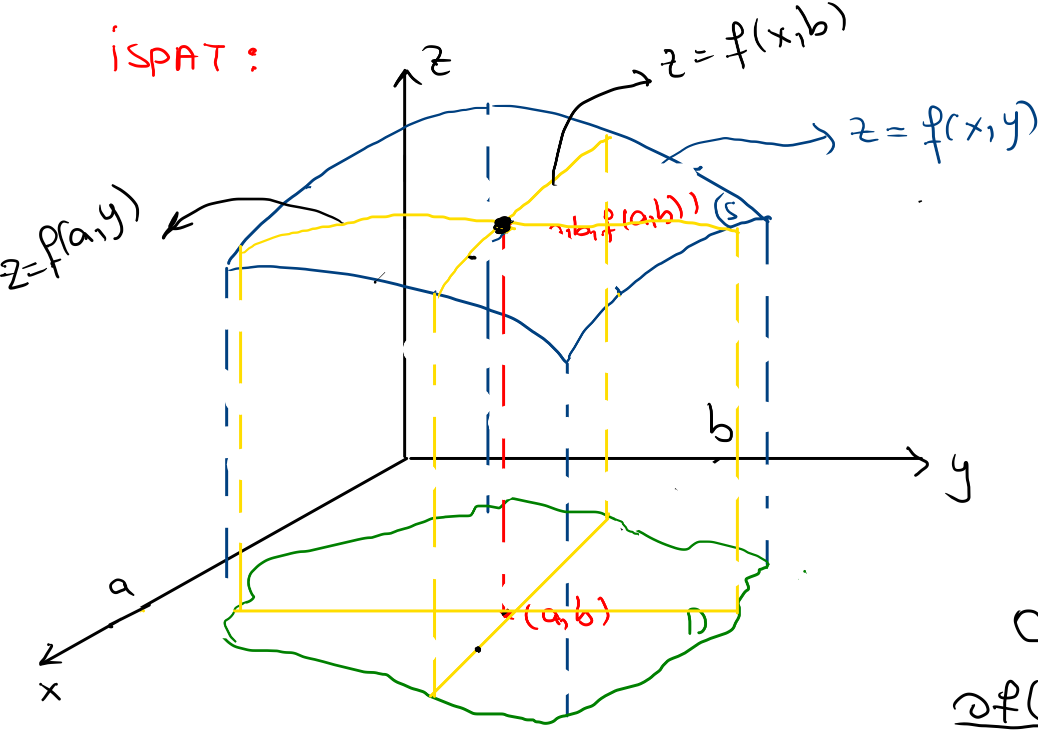
Eğer bu eşitsizlikler (a,b) yeterince küçük civarında değil de tüm tanım bölgesindeki (x,y) noktaları için sağlanıyorsa o zaman $f(a,b)$'ye mutlak (global) maksimum ya da mutlak (global) minimum denir.

Teorem: $z = f(x,y)$ fonksiyonu ve 1. mertebeden kısmi türevleri bir D bölgesinde tanımlı ve sürekli olsunlar. Tanım kümesine ait bir (a,b) noktasında fonksiyonun maksimum veya minimum değere sahip olması için gerek koşul

$$\frac{\partial f(a,b)}{\partial x} = 0 \qquad \frac{\partial f(a,b)}{\partial y} = 0$$

olmasıdır.

İSPAT :



Fonksiyonun (a,b) noktasında maksimumu veya minimumu olabilmesi için tanıma göre

$$f(a+h,b+k) - f(a,b) > 0 \quad \text{veya}$$

$$f(a+h,b+k) - f(a,b) < 0 \quad \text{olmalıdır.}$$

Hipoteze göre de birinci mertebeden kısmi türevler (a,b) noktasında mevcuttur. O halde

$$\frac{\partial f(a,b)}{\partial x} = \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h,b) - f(a,b)}{h}$$

$$\frac{\partial f(a,b)}{\partial y} = \lim_{k\to 0} \frac{f(a,b+k) - f(a,b)}{k}$$

(a,b) noktasının $|x-a|<h$, $|y-b|<k$ civarındaki tüm noktalarda $f(a+h,b+k)<f(a,b)$ veya $f(a+h,b+k)>f(a,b)$ eşitsizlikleri sağlanacağından (a,b) noktasında türev değerleri hesaplanırken paydaki terimler ya pozitif ya da negatif olur. Farzedelim ki $f(a+h,b)<f(a,b)$ olsun. Türev tanımındaki $h<0$ veya $h>0$ olacağından;

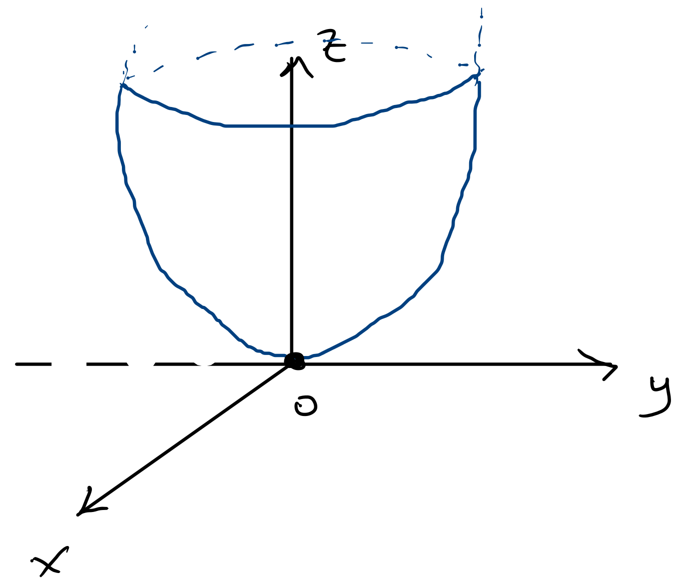
$h<0 \Rightarrow \dfrac{\partial f(a,b)}{\partial x} > 0$, $h>0 \Rightarrow \dfrac{\partial f(a,b)}{\partial x} < 0$

olacaktır. Bu iki eşitsizlik aynı anda gerçekleşemeyeceğinden $\dfrac{\partial f(a,b)}{\partial x} = 0$ olmalıdır.
Benzer şekilde $\dfrac{\partial f(a,b)}{\partial y} = 0$ dur.

Teorem: Bir $z=f(x,y)$ fonksiyonunun tanım bölgesinde maksimum ve minimuma sahip olması için yeter koşul kapalı ve sonlu tanım bölgesinde fonksiyonun sürekli olmasıdır.

Ör/1. $f(x,y) = x^2+y^2 \rightarrow$ paraboloid $D(f): \mathbb{R}^2$

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x} &= 2x = 0 \Rightarrow x = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y} &= 2y = 0 \Rightarrow y = 0 \end{aligned}\right\} \text{(0,0) noktasında max, min olabilir.}$$



$$0 = \underbrace{f(0,0)}_{\text{mutlak minimum değer.}} \leq f(x,y) \quad \forall (x,y) \in D(f)$$

Ör/2 $f(x,y) = 1 - x^2 - y^2$ $\qquad D(f): \mathbb{R}^2$

$\frac{\partial f}{\partial x} = -2x = 0 \Rightarrow x = 0$

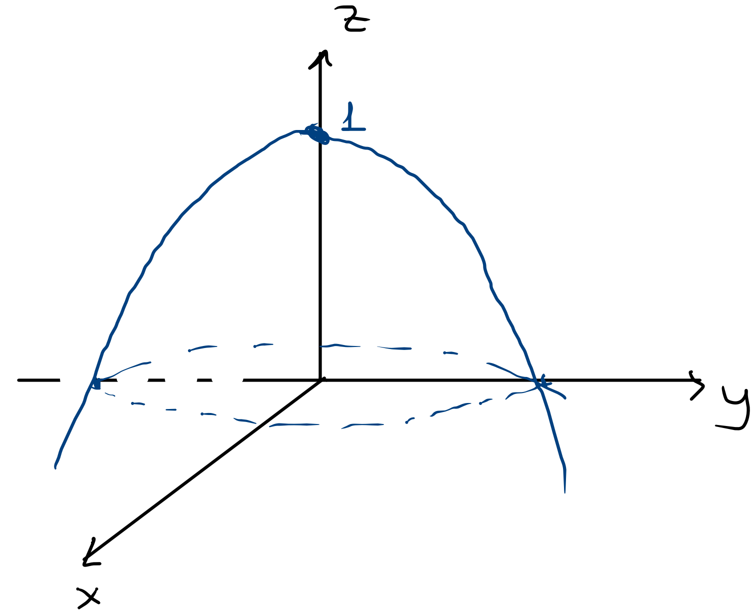
$\frac{\partial f}{\partial y} = -2y = 0 \Rightarrow y = 0$

(0,0) max, min olabilir.

$f(0,0) = 1 \qquad f(x,y) = 1 - x^2 - y^2$

$f(x,y) - f(0,0) = 1 - x^2 - y^2 - 1 = -x^2 - y^2 < 0$

$f(x,y) < \underbrace{f(0,0) = 1}_{\text{mutlak maksimum değeri.}}$

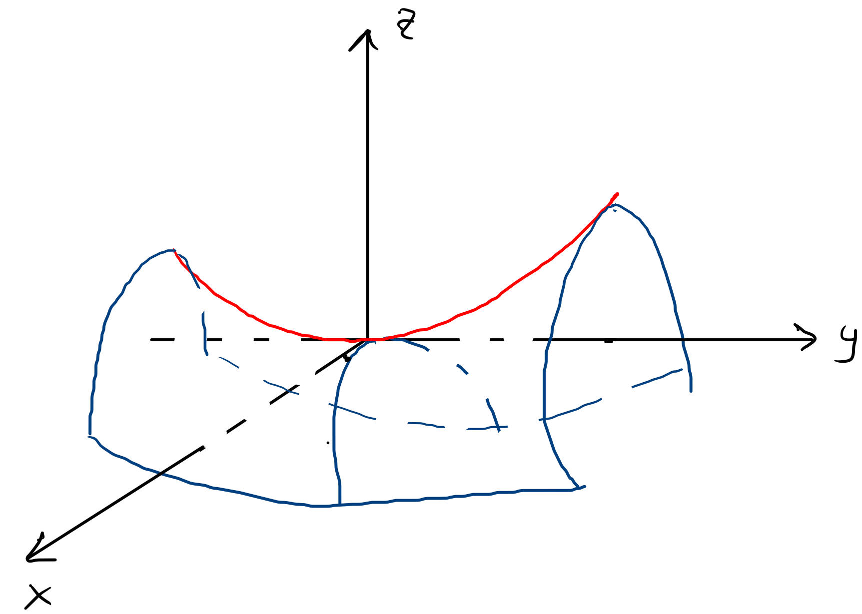


NOT: Çok değişkenli fonksiyonlarda da tek değişkenli fonksiyonlarda olduğu gibi belli noktalarda maksimum, minimum aranır.

1. Kısmi türevleri sıfır yapan noktalar
2. Kısmi türevlerin tanımsız olduğu noktalar
3. Tanım bölgesinin sınır noktaları

Ancak bu noktalarda maksimum, minimum olmayabilir.

Ör/3. $h(x,y)=y^2-x^2$ $\quad D(h)=\mathbb{R}^2$ $\rightarrow$ hiperbolik paraboloid



$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial h}{\partial x} &= -2x = 0 \Rightarrow x=0 \\ \frac{\partial h}{\partial y} &= 2y = 0 \Rightarrow y=0\end{aligned}\right\} \text{(0,0) maks, min olabilir.}$$

$f(0,0)=0$

$$f(h,0) = -h^2$$

$$f(h,0)-f(0,0) = -h^2 < 0 \qquad f(h,0) < f(0,0)$$

$$f(0,k)-f(0,0) = k^2 > 0 \qquad f(0,k) > f(0,0)$$

(0,0)'da f'in ne max, ne de min. değeri vardır.

(0,0) $\rightarrow$ Eyer noktasıdır.

Ör/4 $f(x,y)=\sqrt{x^2+y^2}$ koni $\quad D(f): \mathbb{R}^2$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} = 0 \Rightarrow x=0$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} = 0 \Rightarrow y=0$$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\partial f}{\partial x} = \lim_{x\to 0}\left[\lim_{y\to 0} \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\right] = 1$$

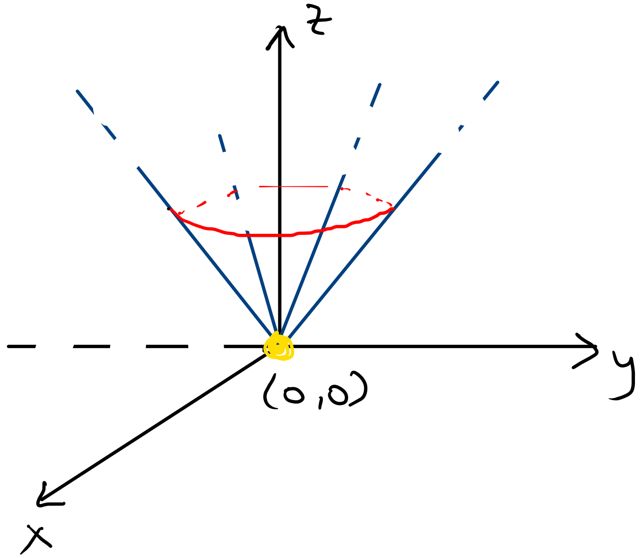
$$\neq$$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\partial f}{\partial x} = \lim_{y\to 0}\left[\lim_{x\to 0} \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\right] = 0$$

$\frac{\partial f}{\partial x} \rightarrow$ süreksiz

(0,0) $\rightarrow$ Tekil nokta (kritik nokta)

$f(0,0)=0$ $\qquad f(x,y)-f(0,0) = \sqrt{x^2+y^2} - 0 > 0 \Rightarrow f(x,y) \geq f(0,0) \rightarrow$ mutlak min. değerdir.



Ör/ $f(x,y) = 1 - x \qquad D(f): \mathbb{R}^2$

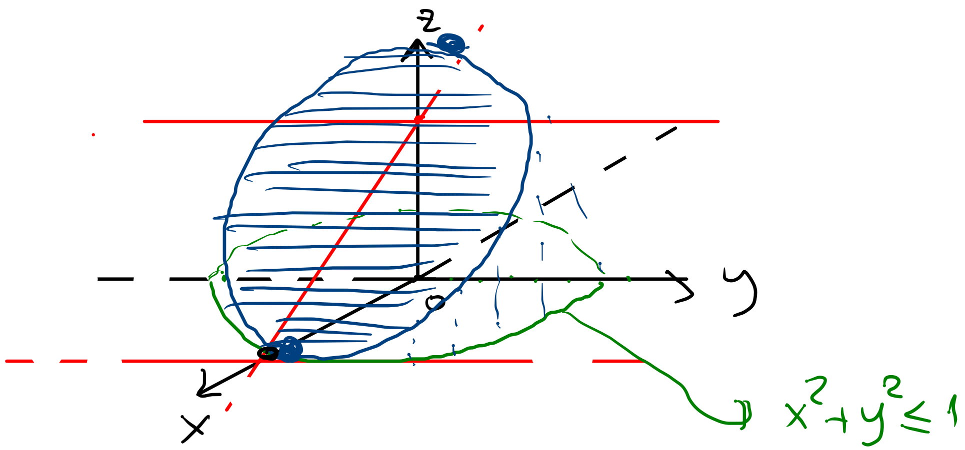
$\frac{\partial f}{\partial x} = -1 \neq 0$

$\frac{\partial f}{\partial y} = 0$

maksimum ve minimum yoktur.

Eğer bölgeyi kapalı ve sonlu bir bölgeye kısıtlarsak o zaman max ve min. söz edebiliriz.

$D(f|) = x^2+y^2 \leq 1$



$z = 1 - x$

$x = 1 \Rightarrow z = 0$ mutlak min.

$x = -1 \Rightarrow z = 2$ mutlak max.