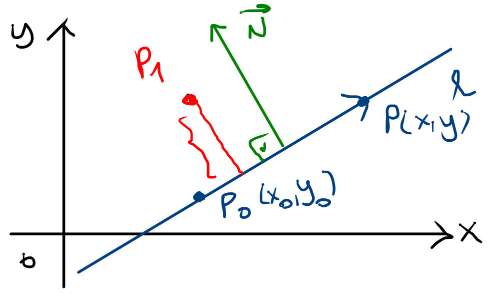
Doğru ve Düzlem



Düzlemde Doğru

$\vec{N} = a\vec{i} + b\vec{j}$ sıfırdan farklı bir vektör ve $P_0 = P_0(x_0, y_0)$, xy-düzleminde bir nokta olsun. P_0 noktasından geçen ve $\vec{N}$ vektörüne dik olan tek bir doğru vardır. $\vec{N}$ vektörüne doğrunun 'normali' denir.

$\vec{N}$ vektörüne dik olan bu doğru üzerinde bir $P = P(x, y)$ noktasını gözönüne alalım.

$$\overrightarrow{P_0P} = (x - x_0)\vec{i} + (y - y_0)\vec{j}$$

$$\overrightarrow{P_0P} \perp \vec{N} \Rightarrow \overrightarrow{P_0P} \cdot \vec{N} = 0 \Rightarrow \left[(x - x_0)\vec{i} + (y - y_0)\vec{j}\right]\left[a\vec{i} + b\vec{j}\right] = 0$$

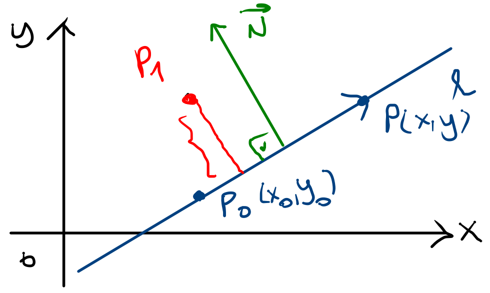
$$a(x - x_0) + b(y - y_0) = 0$$

$$ax + by + (\underbrace{-ax_0 - by_0}_{c}) = 0$$

P_0 noktasından geçen ve $\vec{N} \neq 0$ vektörüne dik olan doğrunun denklemi; $\Leftarrow$ $ax + by + c = 0$

* Bir $P_1(x_1, y_1)$ noktasının bu doğruya olan uzaklığı $d = \dfrac{|ax_1 + by_1 + c_1|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$ sayısıdır.

Doğru Denklemi



Düzlemde Doğru

$\vec{N} = a\vec{i} + b\vec{j}$ sıfırdan farklı bir vektör ve $P_0 = P_0(x_0, y_0)$, xy-düzleminde bir nokta olsun. P_0 noktasından geçen ve $\vec{N}$ vektörüne dik olan tek bir doğru vardır. $\vec{N}$ vektörüne doğrunun 'normali' denir.

$\vec{N}$ vektörüne dik olan bu doğru üzerinde bir $P = P(x,y)$ noktasını gözönüne alalım.

$$\overrightarrow{P_0P} = (x - x_0)\vec{i} + (y - y_0)\vec{j}$$

$$\overrightarrow{P_0P} \perp \vec{N} \Rightarrow \overrightarrow{P_0P} \cdot \vec{N} = 0 \Rightarrow \left[(x-x_0)\vec{i} + (y-y_0)\vec{j}\right]\left[a\vec{i} + b\vec{j}\right] = 0$$

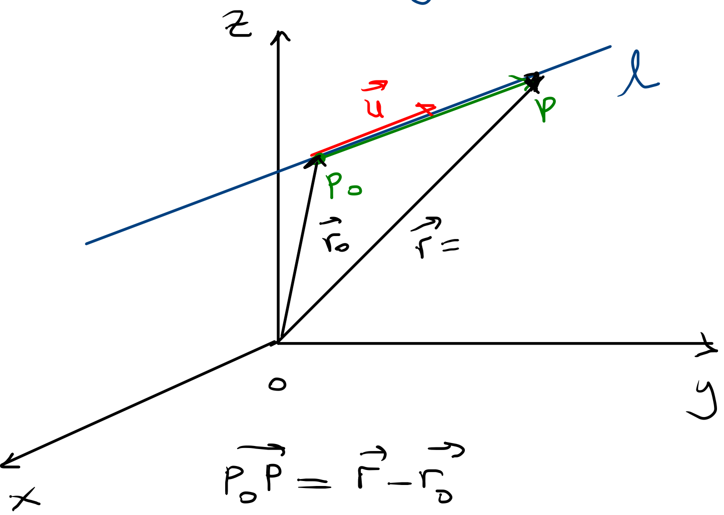
$$a(x - x_0) + b(y - y_0) = 0$$

$$ax + by + (\underbrace{-ax_0 - by_0}_{c}) = 0$$

P_0 noktasından geçen ve $\vec{N} \neq 0$ vektörüne dik olan doğrunun denklemi $\leftarrow$ $ax + by + c = 0 \rightarrow$ doğrunun standart denklemi

* Bir $P_1(x_1, y_1)$ noktasının bu doğruya olan uzaklığı $d = \dfrac{|ax_1 + by_1 + c_1|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$ sayısıdır.

3-boyutlu uzayda doğru



$$\vec{P_0P} = \vec{r} - \vec{r_0}$$

$P_0(x_0, y_0, z_0)$ noktasından geçen ve $\vec{u} = a\vec{i} + b\vec{j} + c\vec{k}$ vektörüne paralel olan bir ℓ doğrusu olsun. $P(x, y, z)$ noktasının bu ℓ doğrusu üzerinde bulunması için $\vec{P_0P}$ vektörünün $\vec{u}$ vektörüne paralel olması gerekir. Yani,

$$\vec{P_0P} = t.\vec{u}$$

olacak şekilde bir t sayısı vardır. $(t \in \mathbb{R})$

$$\vec{P_0P} = (x-x_0)\vec{i} + (y-y_0)\vec{j} + (z-z_0)\vec{k} = \vec{r} - \vec{r_0}$$

$$\underbrace{\vec{P_0P} = t.\vec{u}}_{} \Rightarrow (x-x_0)\vec{i} + (y-y_0)\vec{j} + (z-z_0)\vec{k} = t[a\vec{i} + b\vec{j} + c\vec{k}]$$

$$\vec{r} - \vec{r_0} = t\vec{u}$$

$$\boxed{\vec{r} = \vec{r_0} + t\vec{u}}$$

doğrunun vektörel denklemi

$$\left\{\begin{array}{l} x - x_0 = t.a \\ y - y_0 = t.b \\ z - z_0 = t.c \end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{l} x = x_0 + at \\ y = y_0 + bt \\ z = z_0 + ct \end{array}\right\} \text{doğrunun parametrik denklemleri}$$

$$\frac{x - x_0}{a} = \frac{y - y_0}{b} = \frac{z - z_0}{c} = t$$

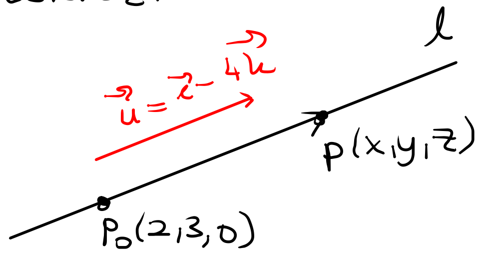
Doğrunun simetrik denklemleri

$$\left.\begin{array}{l} \vec{OP_0} = \vec{r_0} = x_0\vec{i} + y_0\vec{j} + z_0\vec{k} \\ \vec{OP} = \vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k} \end{array}\right\} \vec{P_0P} = \vec{OP} - \vec{OP_0}$$

P_0 ve $P_1(x_1,y_1,z_1)$ noktalarından geçen doğrunun denklemi

$$\frac{x-x_0}{x_1-x_0}=\frac{y-y_0}{y_1-y_0}=\frac{z-z_0}{z_1-z_0}$$ dir.

Ör/ $(2,3,0)$ noktasından geçen ve $\vec{i}-4\vec{k}$ vektörüne paralel olan doğrunun parametrik denklemlerini bulunuz.



$$\vec{P_0P}=(x-2)\vec{i}+(y-3)\vec{j}+(z-0)\vec{k}$$

$$\vec{P_0P}\parallel\vec{u}\Rightarrow\vec{P_0P}=t.\vec{u}$$

$$(x-2)\vec{i}+(y-3)\vec{j}+z\vec{k}=t\vec{i}-4t\vec{k}$$ → vektörel denklem.

$$\left\{\begin{array}{l} x-2=t \\ y-3=0 \\ z=-4t \end{array}\right\}\Rightarrow\left.\begin{array}{l} x=2+t \\ y=3 \\ z=-4t \end{array}\right\}$$ doğrunun parametrik denklemleri.

Simetrik denklemler ←

$y=3,\quad \dfrac{x-2}{1}=\dfrac{z}{-4}=t$

DÜZLEM

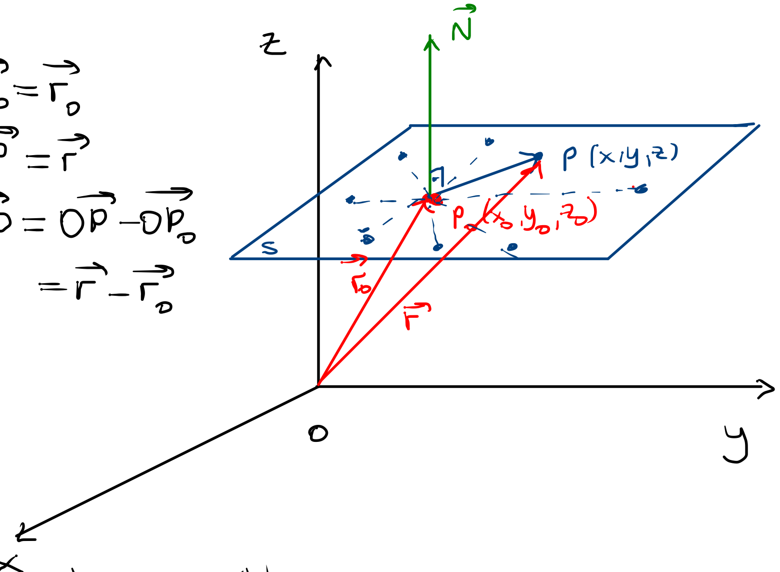
$P_0(x_0,y_0,z_0)$ uzayda bir nokta ve $\vec{N}=a\vec{i}+b\vec{j}+c\vec{k}$ sıfırdan farklı bir vektör olsun. P_0 noktasından geçen ve $\vec{N}$ vektörüne dik olan düzlemin denklemi, $\vec{P_0P}$, $\vec{N}$'e dik olacak şekildeki tüm P noktalarının kümesi olarak tanımlanır.

$\vec{OP_0} = \vec{r_0}$

$\vec{OP} = \vec{r}$

$\vec{P_0P} = \vec{OP} - \vec{OP_0}$

$= \vec{r} - \vec{r_0}$



$\vec{P_0P} \perp \vec{N}$ $\quad \vec{N} = a\vec{i} + b\vec{j} + c\vec{k} \neq 0$

$\vec{P_0P} \cdot \vec{N} = 0$

$\vec{P_0P} = (x - x_0)\vec{i} + (y - y_0)\vec{j} + (z - z_0)\vec{k}$

$\vec{P_0P} \cdot \vec{N} = 0$

$\Rightarrow a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0 \rightarrow$ Düzlemin skaler formu

$ax + by + cz + \underbrace{(-ax_0 - by_0 - cz_0)}_{d} = 0$

NOT: a, b, c sabitlerinden en az biri sıfırdan farklı ise $ax + by + cz + d = 0$ $\mathbb{R}^3$'te dalma bir düzlem gösterir.

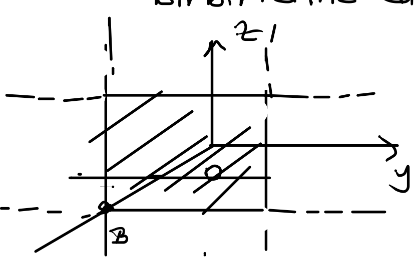
$x = 3 \rightarrow$ düzlem

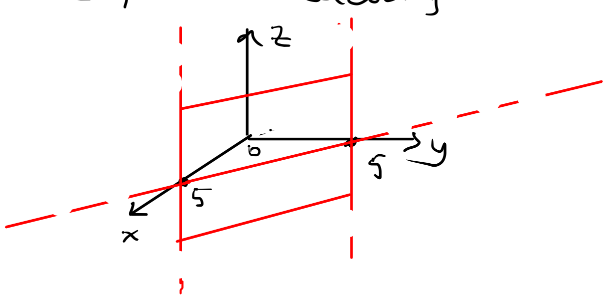
$x + y = 5 \rightarrow$ düzlem

Düzlemin standart denklemi $\leftarrow$ $ax + by + cz + d = 0 \rightarrow$ P_0 noktasından geçen, $\vec{N}$ vektörüne dik olan düzlemin denklemi

$\vec{P_0P} = \vec{r} - \vec{r_0} \Rightarrow (\vec{r} - \vec{r_0}) \cdot \vec{N} = 0 \rightarrow$ düzlemin vektörel denklemi

Uzayda iki düzlemin birbirine paralel olması için normal vektörlerinin birbirine paralel olması, birbirlerine dik olmaları için ise normallerinin birbirine dik olması gerekir.





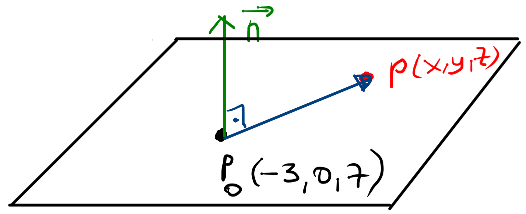
Örnekler

1) $P_0(-3,0,7)$ noktasından geçen ve $\vec{n}=5\vec{i}+2\vec{j}-\vec{k}$ vektörüne dik olan düzlem denklemini bulunuz. $(P(x,y,z))$

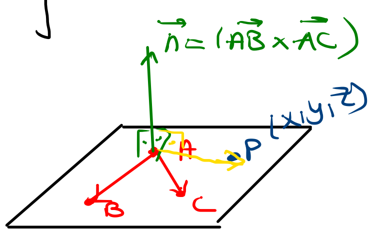
$$\overrightarrow{P_0P}=(x+3)\vec{i}+y\vec{j}+(z-7)\vec{k}$$

$$\overrightarrow{P_0P}\cdot\vec{n}=0 \Rightarrow 5(x+3)+2y-(z-7)=0$$

$$5x+2y-z=-22$$



2) $A(0,0,1)$, $B(2,0,0)$, $C(0,3,0)$ noktalarından geçen düzlemin denklemini bulunuz.



$$\overrightarrow{AB}=2\vec{i}-\vec{k}$$

$$\overrightarrow{AC}=3\vec{j}-\vec{k}$$

$$\vec{n}=\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 2 & 0 & -1\\ 0 & 3 & -1\end{vmatrix}=3\vec{i}+2\vec{j}+6\vec{k}=\vec{n}$$

$$\overrightarrow{AP}=x\vec{i}+y\vec{j}+(z-1)\vec{k}$$

$$\vec{n}\cdot\overrightarrow{AP}=0 \Rightarrow 3x+2y+6(z-1)=0$$

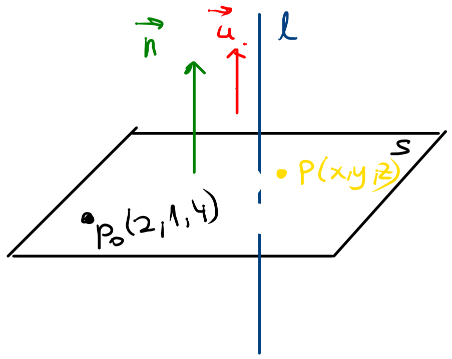
$$3x+2y+6z=6$$

3) Parametrik denklemleri $\left.\begin{array}{l} x = 2+t \\ y = 1+2t \\ z = 3 \end{array}\right\}$ olan ℓ doğrusuna dik ve $P_0(2,1,4)$ noktasından geçen düzlemin denklemini bulunuz.

$\vec{r}-\vec{r_0} = t.\vec{u}$

$x = x_0 + tu_1$
$y = y_0 + tu_2$
$z = z_0 + tu_3$

$\vec{u} = \langle 1,2,0 \rangle$



$\vec{u} = \vec{i} + 2\vec{j} \parallel \vec{n}$

$\vec{u} \perp S \qquad \vec{u} = \vec{n}$

$\overrightarrow{P_0P} = (x-2)\vec{i} + (y-1)\vec{j} + (z-4)\vec{k}$

$\overrightarrow{P_0P} \cdot \vec{u} = 0 \Rightarrow (x-2) + 2(y-1) = 0$

$x + 2y = 4$

Ödev (2,0,1) noktasından geçen ve (1,1,0), (4,−1,−2) noktalarından geçen doğruya dik olan düzlemin denklemini bulunuz.

NOT: Eğer $ax+by+cz=d$ denkleminde a,b,c katsayılarının tümü sıfırdan farklı ise koordinat eksenleri üzerindeki noktaları a_1, b_1, c_1 olan düzlemin denklemi

$\frac{x}{a_1} + \frac{y}{b_1} + \frac{z}{c_1} = 1$ dir.

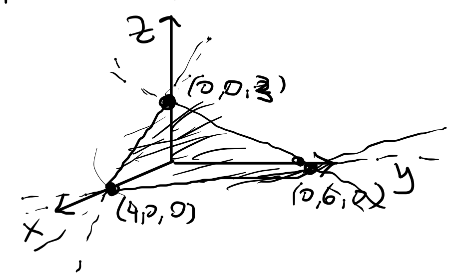
$\frac{ax}{d} + \frac{by}{d} + \frac{cz}{d} = 1$

$\frac{x}{\frac{d}{a}} + \frac{y}{\frac{d}{b}} + \frac{z}{\frac{d}{c}} = 1$

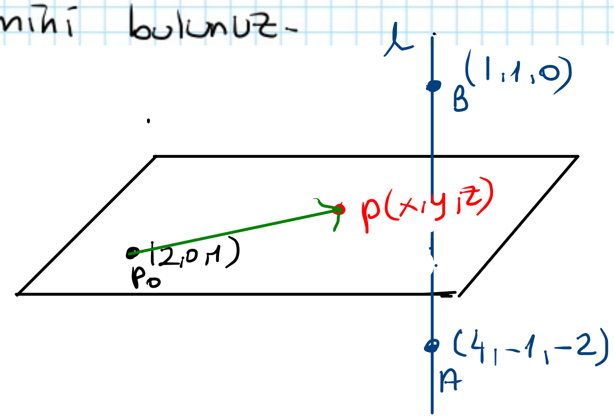
$\frac{d}{a} = a_1, \quad \frac{d}{b} = b_1, \quad \frac{d}{c} = c_1$

Ör/ $3x + 2y + 4z = 12$

$\frac{x}{4} + \frac{y}{6} + \frac{z}{3} = 1$



Ödev: $(2,0,1)$ noktasından geçen ve $(1,1,0)$, $(4,-1,-2)$ noktalarından geçen doğruya dik olan düzlemin denklemini bulunuz.



$\overrightarrow{AB} = -3\vec{i} + 2\vec{j} + 2\vec{k} \perp$ düzlem.

$\overrightarrow{P_0P} \perp \overrightarrow{AB} \Rightarrow \overrightarrow{P_0P} \cdot \overrightarrow{AB} = 0$

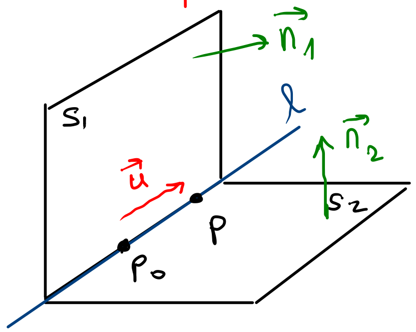
$$\left[(x-2)\vec{i} + y\vec{j} + (z-1)\vec{k}\right] \cdot \left[-3\vec{i} + 2\vec{j} + 2\vec{k}\right] = 0$$

$$-3(x-2) + 2y + 2(z-1) = 0$$

$$-3x + 2y + 2z = -4$$

$$3x - 2y - 2z = 4$$

Kesişim Doğruları



İki düzlemin paralel olması için gerek ve yeter koşul onların normallerinin paralel olmasıdır. Paralel olmayan iki düzlem bir doğruda kesişirler.

$$\vec{u} = \vec{n}_1 \times \vec{n}_2$$

NOT: Bir düzlem denkleminde x, y ve z'nin katsayıları düzlemin normal vektörünün bileşenlerini verir.

Ör/ a) $S_1: 3x-6y-2z=15$ düzlemi ile $S_2: 2x+y-2z=5$ düzleminin kesişim doğrusuna paralel bir vektör bulunuz.

$$\vec{n}_1 = 3\vec{i} - 6\vec{j} - 2\vec{k}$$

$$\vec{n}_2 = 2\vec{i} + \vec{j} - 2\vec{k}$$

$$\vec{u} = \vec{n}_1 \times \vec{n}_2 = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 3 & -6 & -2 \\ 2 & 1 & -2 \end{vmatrix} = 14\vec{i} + 2\vec{j} + 15\vec{k}$$

b) Bu düzlemlerin kesiştiği doğrunun parametrik denklemlerini bulunuz.

$$z=0 \Rightarrow \begin{array}{r} 3x - 6y = 15 \\ 6/\ 2x + y = 5 \\ \hline 15x = 45 \end{array}$$

$$x = 3 \Rightarrow y = -1$$

$P_0(3,-1,0) \qquad P(x,y,z)$

$$\overrightarrow{P_0P} = (x-3)\vec{i} + (y+1)\vec{j} + z\vec{k}$$

$$\vec{u} = 14\vec{i} + 2\vec{j} + 15\vec{k}$$

$$\overrightarrow{P_0P} \parallel \vec{u}$$

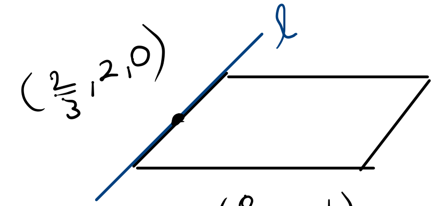
$$\overrightarrow{P_0P} = t.\vec{u}$$

$$\left.\begin{array}{l} x-3 = 14t \\ y+1 = 2t \\ z = 15t \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x = 3+14t \\ y = -1+2t \\ z = 15t \end{array}\right\} \text{P.D.}$$

Ö/ Parametrik denklemleri

$$x = \frac{8}{3} + 2t$$
$$y = -2t$$
$$z = 1 + t$$

olan doğrunun $3x + 2y + 6z = 6$ düzlemi ile kesiştiği noktayı bulunuz.



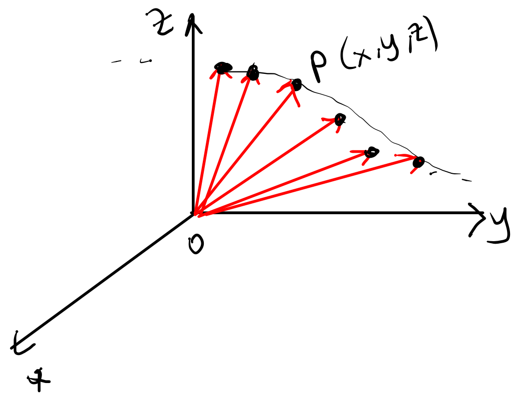
$$3\cdot\left(\frac{8}{3} + 2t\right) + 2\cdot(-2t) + 6(1+t) = 6$$
$$8 + 6t - 4t + 6 + 6t = 6$$
$$8t = -8$$
$$t = -1 \Rightarrow \quad x = \frac{8}{3} - 2 = \frac{2}{3}, \quad y = -2\cdot(-1) = 2, \quad z = 1 + (-1) = 0$$

Vektör Değerli Fonksiyonlar

Üç boyutlu uzayda bir (x, y, z) noktasının yer vektörü $\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ şeklindedir. Eğer $\vec{r}$ vektörünün bileşenleri değişim aralığı $[a, b]$ olan bir reel t değişkeninin fonksiyonları iseler bu taktirde $\vec{r}$'ye t'nin vektör değerli fonksiyonu denir.

$$\vec{r}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k}$$

Vektör değerli bir fonksiyon tanım kümesindeki herbir elemana bir vektör bağlar. Böyle bir fonksiyonun değer kümesi tanım kümesindeki noktalara karşılık gelen vektörlerin topluluğudur.



$$x = x(t)$$
$$y = y(t)$$
$$z = z(t)$$