Formal Eğri Çizimleri

1. $f(x)$ için kontrol

a) Tanım kümesi bulunur.

b) Süreksizlik noktaları belirlenir

c) Asimtotlar belirlenir.

d) Simetri bakılır

e) Eksenleri kestiği noktalar belirlenir.

2. $f'(x)$ için kontrol

a) Kritik noktalar ve tekil noktalar bulunur.

b) türevin işareti incelenir. Böylece fonksiyonun artan ve azalan olduğu aralıklar bulunur.

3. $f''(x)$ için kontrol

a) $f''(x)=0$ olan noktalar belirlenir

b) $f''(x)$'in tanımlı olmadığı noktalar belirlenir.

c) $f''(x)$'in işareti incelenir. Böylece fonksiyonun grafiğinin konkavlığının hangi yönde olduğu bulunur.

d) Büküm noktaları bulunur.

4. Tüm bilgiler bir tabloda özetlenerek eğri çizilir.

Eğri Çizimleri

1) $y=x^3$

$D(f): \mathbb{R}$, Her yerde sürekli

$\lim\limits_{x \to \mp\infty} x^3 = \mp\infty$ E.A olabilir.

Eğer varsa $y=ax+b$ şeklinde olacaktır.

$a = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{x^3}{x} = \lim\limits_{x\to\infty} x^2 = \infty$ olduğundan eğri kolu paraboliktir.

$(-x)^3 = -x^3 = -f(x)$ fonksiyon tektir ve orjine göre simetriktir.

$x = 0 \Rightarrow y = 0$

$y = 0 \Rightarrow x = 0$

$f'(x) = 3x^2 > 0$ artan bir fonksiyon.

$f'(x) = 0 \Rightarrow 3x^2 = 0 \Rightarrow x = 0$ K.N.

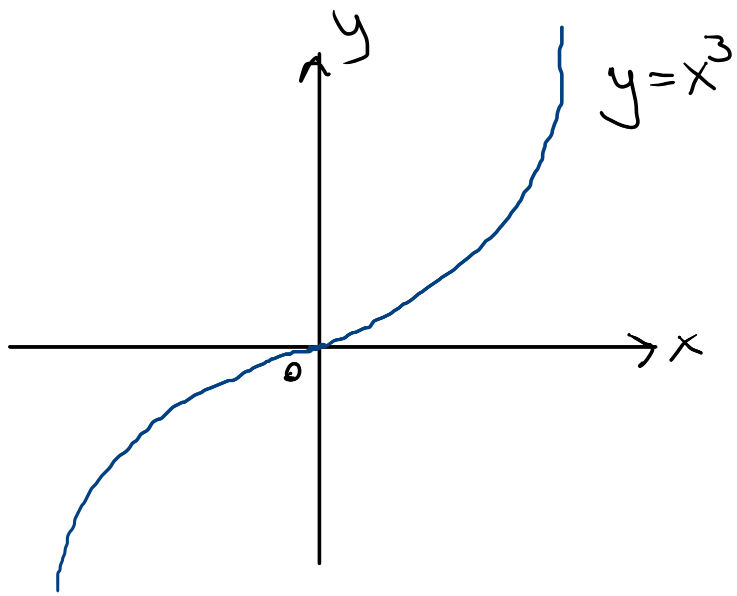
$f''(x) = 6x$ $\qquad f''(x) = 0 \Rightarrow x = 0$

$f''(0) = 0$

$\downarrow$

K.N.

x	$-\infty$		0		∞
f''		$-$	0	$+$	
f'		$+$	0	$+$	
f	$-\infty$	aşağı $\nearrow$	0	yukarı $\nearrow$	∞



2) $y = \dfrac{x^2+2x+4}{2x}$ fonksiyonunun grafiğini çiziniz.

$D(f): \mathbb{R} - \{0\}$

$x=0$'da fonksiyon tanımsız olduğundan süreksizdir.

$\lim\limits_{x\to 0^-} \left(\dfrac{x}{2}+1+\dfrac{2}{x}\right) = -\infty$

$\lim\limits_{x\to 0^+} \left(\dfrac{x}{2}+1+\dfrac{2}{x}\right) = \infty$

$x=0$ D.A. doğrusudur.

$\lim\limits_{x\to \mp\infty} \dfrac{x^2+2x+4}{2x} = \mp\infty$ E.A. olabilir.

$$\begin{array}{r|l} \cancel{x^2}+2x+4 & 2x \\ \hline -\cancel{x^2} & \boxed{\dfrac{x}{2}+1} \\ \hline \cancel{2x}+4 & \\ -\cancel{2x} & \\ \hline 4 & \end{array}$$

$\rightarrow$ E.A doğrusu

$x \to -x$

$y = \dfrac{(-x)^2+2(-x)+4}{2(-x)}$

$= \dfrac{x^2-2x+4}{-2x} \neq y$
$\neq -y$

simetri yoktur.

$x=0 \Rightarrow y \to \infty$

$y=0 \Rightarrow x^2+2x+4=0$

$x_{1,2} = \dfrac{-2 \mp \sqrt{4-16}}{2}$

Reel kök yok.

$$y' = \frac{(2x+2)\cdot 2x - 2\cdot(x^2+2x+4)}{4x^2} = \frac{4x^2 + \cancel{4x} - 2x^2 - \cancel{4x} - 8}{4x^2}$$

$$= \frac{2x^2-8}{4x^2} = \frac{2(x-2)(x+2)}{\cancel{4}x^2} = \frac{x^2-4}{2x^2}$$

$y' = 0 \Rightarrow x = \mp 2$ K.N.

$f''(-2) = -\frac{1}{2} < 0$

max.

$y' \to \infty \Rightarrow x = 0$ T.N.

$$y'' = \frac{2x\cdot 2x^2 - 4x\cdot(x^2-4)}{4x^4} = \frac{\cancel{4x^3} - \cancel{4x^3} + 16x}{4x^4} = \frac{4}{x^3}$$

$f''(2) = \frac{1}{2} > 0$

min.

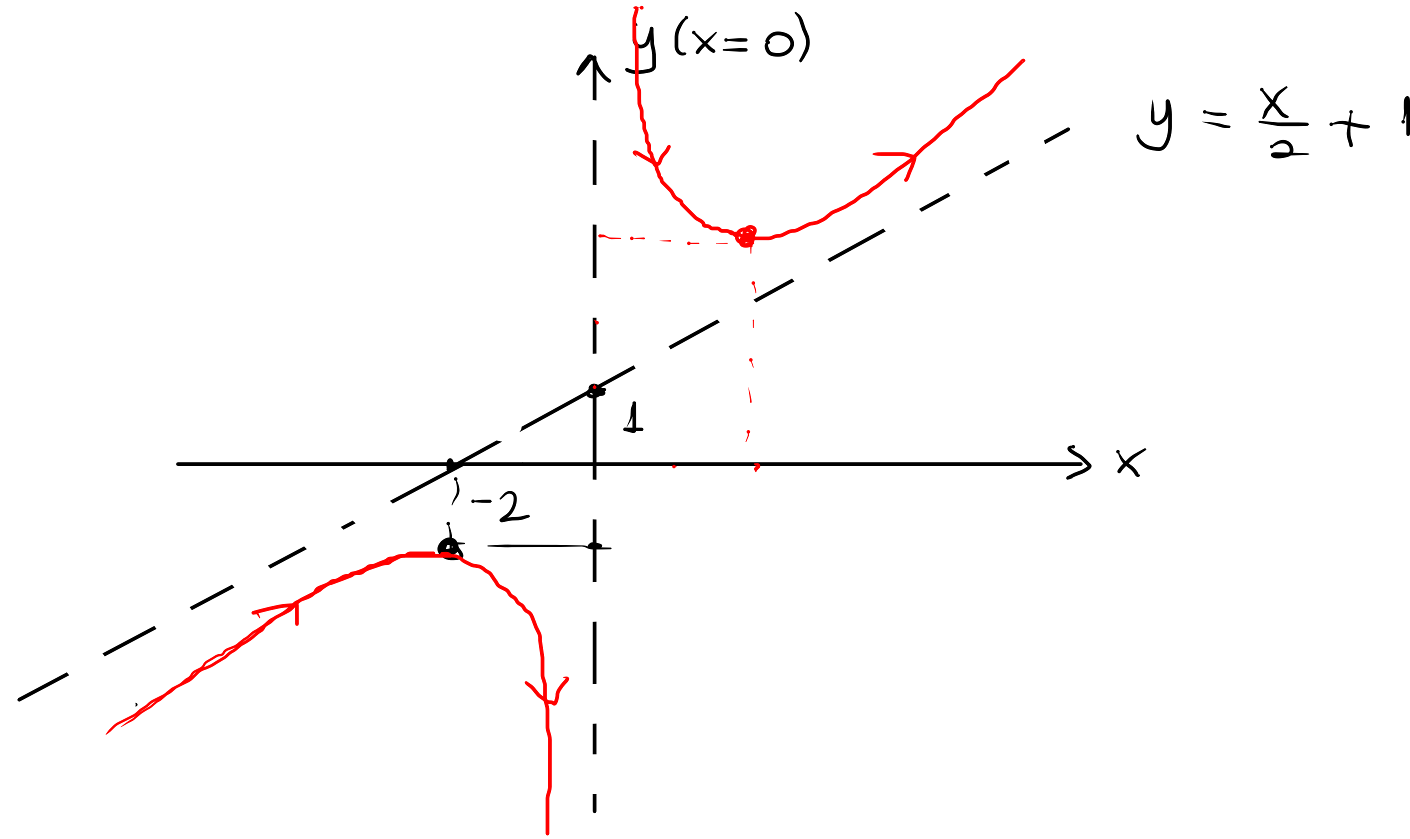
$y'' \to \infty \Rightarrow x = 0$

$f(-2) = -1$

$f(2) = 3$

x	$-\infty$		-2		0		2		∞
f''		$-$		$-$	||	$+$		$+$	
f'		$+$	$\bullet$	$-$	||	$-$	$\bullet$	$+$	
f	$-\infty$	$\nearrow$	-1 max	$\searrow$	$-\infty$ || $+$	$\searrow$	3 min.	$\nearrow$	∞

x	$-\infty$		-2		0		2		∞
f''		$-$		$-$	‖	$+$		$+$	
f'		$+$	•	$-$	‖	$-$	•	$+$	
f	$-\infty$	aşağı ↗	-1 max	aşağı ↘	$-\infty$ ‖ $+\infty$	yukarı ↘	3 min	yukarı ↗	∞



Öd. $f(x) = \dfrac{x^2-1}{x^2-4}$

3) $f(x)=\sqrt{\dfrac{1+x}{1-x}}$ fonksiyonunun grafiğini çiziniz.

$$\frac{1+x}{1-x}\geq 0$$

x		-1		1	
$1+x$	$-$	0	$+$		$+$
$1-x$	$+$		$+$	0	$-$
$\dfrac{1+x}{1-x}$	$-$		$+$		$-$

$D(f)=[-1,1)$

$$\lim_{x\to 1^-}\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}=\lim_{h\to 0}\sqrt{\frac{1+(1-h)}{1-(1-h)}}=\lim_{h\to 0}\sqrt{\frac{2-h}{h}}=\infty$$

$x=1^-$ tek yönlü düşey asimtottur.

$x\to -x \Rightarrow f(-x)=\sqrt{\dfrac{1-x}{1+x}}\neq f(x)$
$\neq -f(x)$

$x=0\Rightarrow y=1$

$y=0\Rightarrow x+1=0\Rightarrow x=-1$

$$f(x) = \left(\frac{1+x}{1-x}\right)^{1/2} \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{2}\left(\frac{1+x}{1-x}\right)^{-1/2} \cdot \left(\frac{1-\cancel{x}+1+\cancel{x}}{(1-x)^2}\right)$$

$$= \frac{\frac{1}{(1-x)^2}}{\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}} = \frac{1}{(1+x)^{1/2} \cdot (1-x)^{3/2}} \qquad \boxed{f'(x) > 0}$$

$f'(x)=0$ yapan x noktası yok.
$f'(x) \to \infty$ " " " "
} k.N ve T.N yoktur.

$$f''(x) = \frac{-\left[\frac{1}{2}(1+x)^{-1/2}(1-x)^{3/2} + \frac{3}{2}\cdot(-1)\cdot(1-x)^{1/2}(1+x)^{1/2}\right]}{(1+x)(1-x)^3}$$

$$= \frac{\frac{1}{2}(1-x)^{1/2}(1+x)^{-1/2}\left[-(1-x)+3(1+x)\right]}{(1+x)(1-x)^3} = \frac{\frac{1}{2}\left[2+4x\right]}{(1+x)^{3/2}\cdot(1-x)^{5/2}}$$

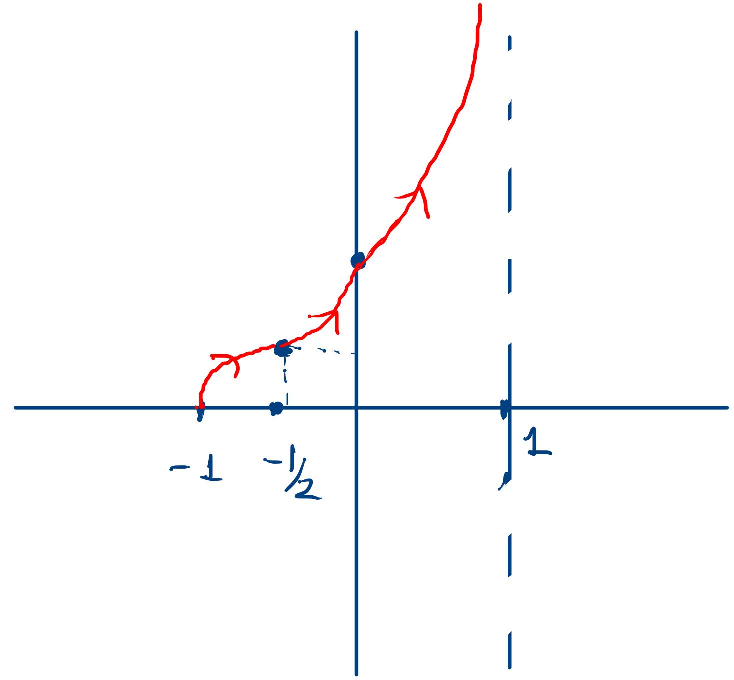
$$= \frac{1+2x}{(1+x)^{3/2}(1-x)^{5/2}}$$

$f''(x) = 0 \Rightarrow 1+2x = 0 \Rightarrow x = -\frac{1}{2}$

$f'(-\frac{1}{2})$ mevcut dolayısıyla $x = \frac{1}{2}$ B.N.

B.N.

x		-1		$-\frac{1}{2}$		0		1	
f''			$-$	$\bullet$	$+$		$+$		
f'			$+$		$+$		$+$		
f		0	$\nearrow$ aşağı	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	$\nearrow$ yukarı	1	$\nearrow$ yukarı	$+\infty$	



4) $f(x) = x \cdot e^{\frac{x-1}{x}}$ fonksiyonunun grafiğini çiziniz.

$D(f) = \mathbb{R} - \{0\}$

$$\lim_{x \to 0^+} x \cdot e^{\frac{x-1}{x}} = 0 \cdot \underbrace{e^{-\infty}}_{=0} = 0$$

$$\lim_{x \to 0^-} x \cdot e^{\frac{x-1}{x}} = \lim_{h \to 0} (0-h) \cdot e^{\frac{(0-h-1)}{0-h}} = \lim_{h \to 0} -h \cdot e^{\frac{\cancel{-}(h+1)}{\cancel{-}h}} = 0 \cdot \infty$$

$$= \lim_{h \to 0} - \frac{e^{\frac{h+1}{h}}}{\frac{1}{h}} \overset{\frac{\infty}{\infty}}{\underset{L'H}{=}} \lim_{h \to 0} - \frac{\frac{\cancel{h}-(\cancel{h}+1)}{\cancel{h^2}} \cdot e^{\frac{h+1}{h}}}{-1/\cancel{h^2}} = -\infty$$

$$\lim_{x\to\mp\infty} x.e^{\frac{x-1}{x}} = \mp\infty$$ E.A olabilir.

varsa $y=ax+b$ şeklindedir.

$$a=\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{\cancel{x}e^{\frac{x-1}{x}}}{\cancel{x}}=e$$

$$b=\lim_{x\to\infty}[f(x)-ax]=\lim_{x\to\infty} xe^{\frac{x-1}{x}}-ex$$

$$=\lim_{x\to\infty} x.(e^{\frac{x-1}{x}}-e)=0.\infty$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{e^{\frac{x-1}{x}}-e}{1/x}\overset{\frac{0}{0}}{=}\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{\cancel{x}-(\cancel{x}-1)}{x^2}\cdot e^{\frac{x-1}{x}}}{-1/x^2}=-\lim_{x\to\infty} e^{\frac{x-1}{x}}$$

$$=-e$$

$\boxed{y=ex-e}$ E.A doğrusu

$x \to -x \qquad f(-x) = -x \cdot e^{\frac{-x-1}{-x}} = -x \cdot e^{\frac{x+1}{x}} \neq f(x)$

$\neq -f(x)$

$y=0 \Rightarrow x=0$

$f'(x) = e^{\frac{x-1}{x}} + x \cdot \left(\frac{x-(x-1)}{x^2}\right) e^{\frac{x-1}{x}}$

$= e^{\frac{x-1}{x}} \left[1 + \frac{1}{x}\right]$

$= e^{\frac{x-1}{x}} \left(\frac{x+1}{x}\right)$

$f'(x) = 0 \Rightarrow x+1=0$

$x=-1$ k.N.

$f'(x) \to \infty \Rightarrow x=0$ T.N.

$f''(x) = \left[\frac{x-(x-1)}{x^2}\right] \cdot e^{\frac{x-1}{x}} \cdot \left(\frac{x+1}{x}\right) + e^{\frac{x-1}{x}} \cdot \left(\frac{x-(x+1)}{x^2}\right)$

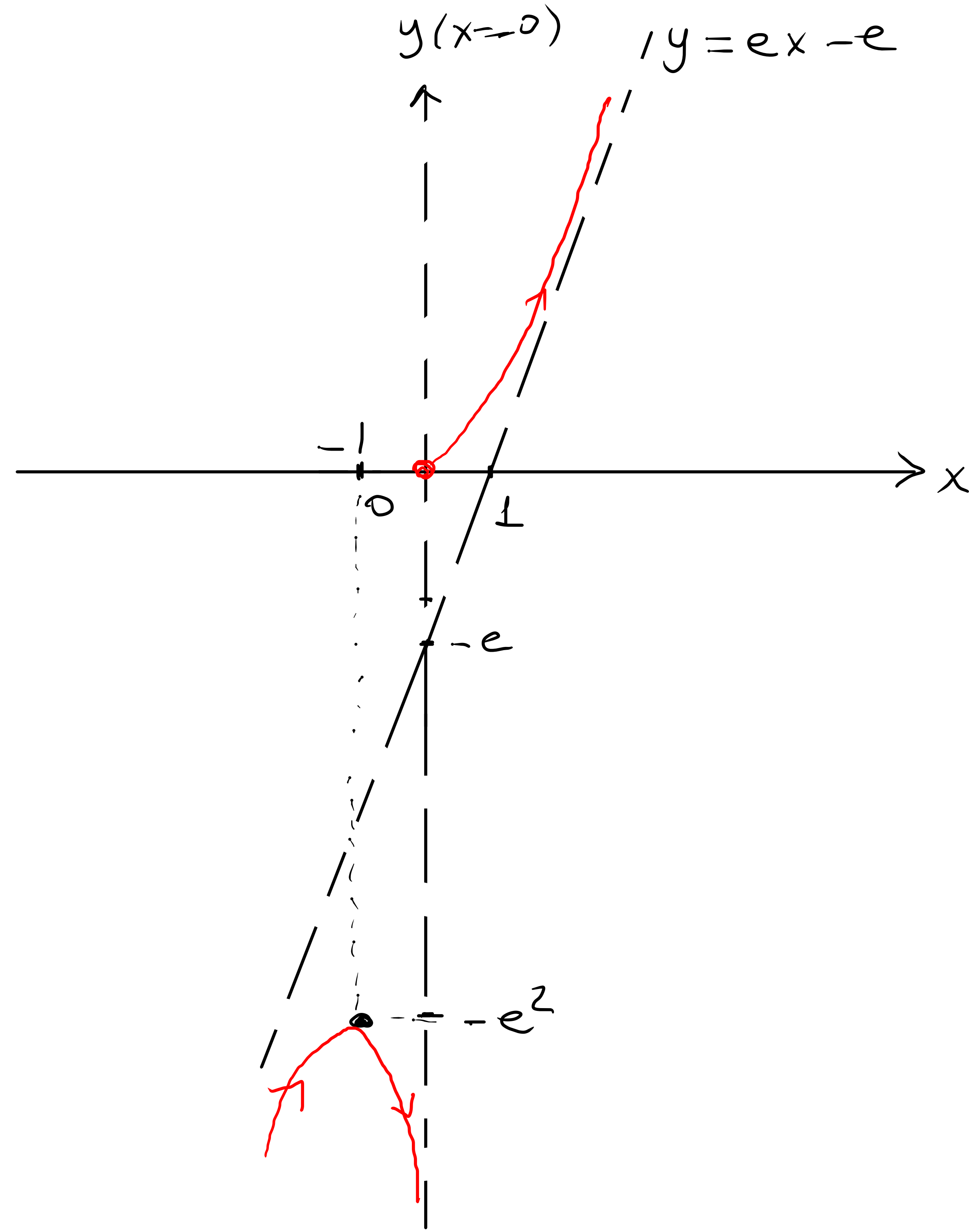
$= \frac{x+1}{x^3} e^{\frac{x-1}{x}} + e^{\frac{x-1}{x}} \left(-\frac{1}{x^2}\right) = \frac{e^{\frac{x-1}{x}}}{x^2}\left[\frac{x+1}{x} - 1\right] = \frac{e^{\frac{x-1}{x}}}{x^3}.$

$f''(x) \neq 0 \qquad f''(-1) = -e^2 < 0$ max.

x	$-\infty$		-1		0		$+\infty$
f''		$-$		$-$		$+$	
f'		$+$	0	$-$	0	$+$	
f	$-\infty$	aşağı ↗	$-e^2$	aşağı ↘	$-\infty$ ǁ 0	yukarı ↗	∞

$\frown$

max.



5) $f(x) = x \cdot \ln x$

$D(f) = (0, \infty)$

$$\lim_{x \to 0^+} x \cdot \ln x \overset{0 \cdot \infty}{=} \lim_{x \to 0^+} \frac{\ln x}{\frac{1}{x}} \overset{\frac{\infty}{\infty}}{=} \lim_{x \to 0^+} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x \to 0^+} -x = 0$$

$\lim_{x \to \infty} x \cdot \ln x = \infty$ E.A. olabilir. Varsa $y = ax + b$ şeklindedir.

$a = \lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to \infty} \frac{x \ln x}{x} = \lim_{x \to \infty} \ln x = \infty$ olduğundan eğik asimtot yoktur. Eğri kolu paraboliktir.

Negatif değerlerde ln tanımsız olduğundan simetriye bakamayız.

$y = 0 \Rightarrow x = 0 \vee \ln x = 0 \Rightarrow x = 1$

$f'(x) = \ln x + x \cdot \frac{1}{x} = \ln x + 1$ $\quad f'(x) = 0 \Rightarrow \ln x + 1 = 0$

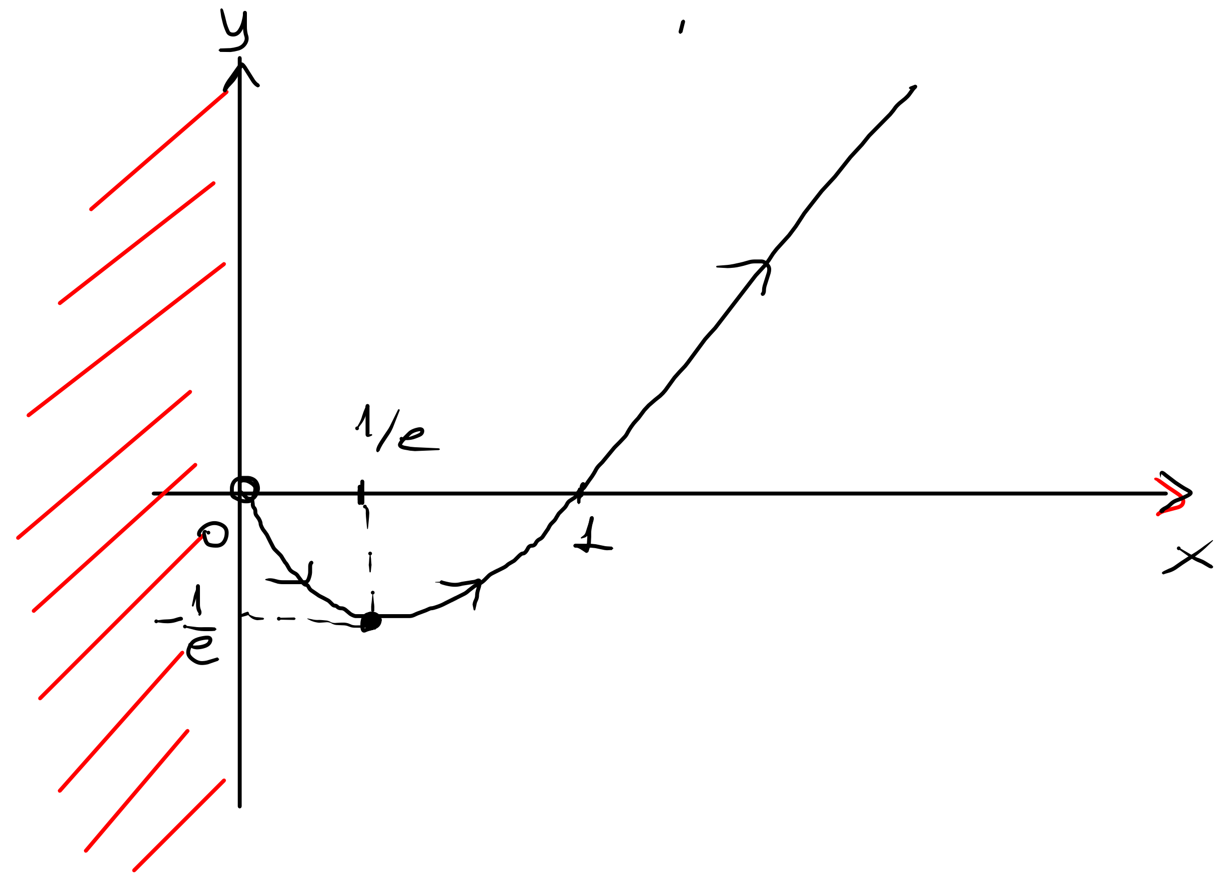
$\ln x = -1 \Rightarrow x = \frac{1}{e}$ K.N.

$f''(x) = \frac{1}{x}$ $\quad f''\left(\frac{1}{e}\right) = e > 0$ min. var. $\quad f''(x) = 0$ yapan değer yok.

f'' daima pozitif. $\quad f\left(\frac{1}{e}\right) = -\frac{1}{e}$

x	0		$1/e$		1		∞
f''		$+$		$+$		$+$	
f'		$-$	0	$+$		$+$	
f	0	$\searrow$	$-\frac{1}{e}$	$\nearrow$			∞

min.



İntegral

Anti türev ve Belirsiz İntegral

Bir f fonksiyonunun bir I aralığındaki anti-türevi

$$F'(x) = f(x) \quad , \quad x \in I$$

eşitliğini sağlayan başka bir F fonksiyonudur.
($F(x)$'e f'in ilkel fonksiyonu denir)

Örnekler

1. $F(x) = x$

$F'(x) = 1 = f(x)$'in anti-türevidir.

2. $G(x) = \frac{1}{2}x^2 \Rightarrow G'(x) = x = f(x)$'in anti-türevidir.

3. $R(x) = -\frac{1}{3}\cos(3x) \Rightarrow R'(x) = \sin(3x) = f(x)$'in anti-türevidir.

4) $F(x) = \frac{-1}{x} \Rightarrow F'(x) = \frac{1}{x^2} = f(x)$'in anti-türevidir.

$$F(x) = \frac{-1}{x} + 2 \Rightarrow F'(x) = \frac{1}{x^2}, \quad F(x) = \frac{-1}{x} + 100, \quad F(x) = \frac{-1}{x} - 20$$

NOT: Anti-türev tek değildir. Eğer c herhangi bir sabit ise o zaman $F(x) = -\frac{1}{x} + c$, herhangi bir aralıkta $f(x) = \frac{1}{x^2}$'nin bir anti-türevidir. Bu aralıkta $f(x)$'in bir anti-türevine bir sabit eklemek suretiyle $f(x)$'in bu aralıktaki başka bir anti-türevi elde edilir. Dolayısıyla f'in bu aralıktaki tüm anti-türevleri onun herhangi bir özel anti-türevine sabitler eklenerek bulunabilir.

. $F(x)$ ve $G(x)$ f'in iki anti-türevi olsun.

$$F'(x) = f(x) \qquad \frac{d}{dx}\left[F(x) - G(x)\right] = F'(x) - G'(x) = f(x) - f(x)$$
$$G'(x) = f(x) \qquad = 0$$

$$F(x) - G(x) = C \Rightarrow F(x) = G(x) + C$$

– Bu çıkarım, aralık olmayan bir küme üzerinde geçerli değildir.

$$\operatorname{sgn}(x) = \begin{cases} -1 & x<0 \\ 1 & x>0 \end{cases}$$

$\frac{d}{dx}\left[\operatorname{sgn}(x)\right] = 0 \quad (x \neq 0)$ Fonksiyon sabittir diyemeyiz. Farklı aralıklarda farklı sabit değerler alıyor.

–

Belirsiz integral.

I aralığındaki $f(x)$ fonksiyonunun belirsiz integrali $\forall x \in I$ için $F'(x) = f(x)$ eşitliğini sağlayan I üzerindeki $F(x)+c$ fonksiyonudur ve bu fonksiyon

$$\underbrace{\int}_{\text{integral işareti}} \underbrace{f(x)}_{\text{integrand}} dx = \int F'(x)\, dx = \underbrace{F(x)}_{f(x)\text{'in anti-türevi veya ilkel fonk.}} + \underbrace{c}_{\text{integrasyon sabiti}}$$

- $\int [f(x) \mp g(x)]\, dx = \int f(x)\, dx \mp \int g(x)\, dx$

- $\int [M \cdot f(x)]\, dx = M \cdot \int f(x)\, dx$

Örnekler

1) $\int x\, dx = \frac{x^2}{2} + c$ (Herhangi bir aralıkta)

2) $\int (x^3 - 5x^2 + 7)\, dx = \int x^3\, dx - 5\int x^2\, dx + 7\int dx$

$= \frac{x^4}{4} - 5\,\frac{x^3}{3} + 7x + c$ (Herhangi bir aralıkta)

3) $\int \left(\frac{1}{x^2} + \frac{2}{\sqrt{x}}\right) dx = \int \frac{1}{x^2}\, dx + 2\int \frac{dx}{\sqrt{x}} = \frac{-1}{x} + 2 \cdot 2\sqrt{x} + C$

($(0,\infty)$ aralığında)

İntegral Tablosu

$$\int dx = x + c$$

$$\int \frac{1}{x^2}\,dx = \frac{-1}{x} + c$$

$$\int x^r\,dx = \frac{x^{r+1}}{r+1} + c \quad (r \neq -1)$$

$$\int \frac{1}{x}\,dx = \ln|x| + c$$

$$\int \sin x\,dx = -\cos x + c$$

$$\int \cos x\,dx = \sin x + c$$

$$\int \sec^2 x\,dx = \tan x + c$$

$$\int \csc^2 x\,dx = -\cot x + c$$

$$\int \sec x \cdot \tan x\,dx = \sec x + c$$

$$\int \csc x \cdot \cot x\,dx = -\csc x + c$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + c \qquad |x| \leq 1$$

$$\int \frac{dx}{1+x^2} = \arctan x + c$$

$$\int \frac{dx}{|x|\sqrt{x^2-1}} = \operatorname{arcsec} x + c \qquad (|x| \geq 1)$$

$$\int \sinh x\,dx = \cosh x + c$$

$$\int \cosh x\,dx = \sinh x + c$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x}} = 2\sqrt{x} + c$$

$$\int e^x\,dx = e^x + c$$

Örnek: Her x için türevi $f'(x) = 6x^2 - 1$ olan ve de $f(2) = 10$ değerini veren $f(x)$ fonksiyonunu bulunuz.

$$f(x) = \cancel{\int} \underbrace{f'(x)\,dx}_{df(x)} = \int (6x^2 - 1)\,dx = 6\int x^2\,dx - \int dx$$

$$= 6 \cdot \frac{x^3}{3} - x + C$$

$$\Rightarrow f(x) = 2x^3 - x + C$$

$$f(2) = 10 \Rightarrow 10 = 16 - 2 + C \Rightarrow 10 - 14 = C \Rightarrow C = -4$$

$$f(x) = 2x^3 - x - 4$$

Örnek: Türevi $\dfrac{t+5}{t^{3/2}}$ olan ve grafiği $(4, 1)$ noktasından geçen $f(t)$ fonksiyonunu bulunuz.

$$f'(t) = \frac{t+5}{t^{3/2}} \Rightarrow f(t) = \int f'(t)\,dt = \int \frac{t+5}{t^{3/2}}\,dt$$

$$= \int t^{-1/2}\,dt + 5\int t^{-3/2}\,dt$$

$$= 2t^{1/2} + 5 \cdot (-2)\, t^{-1/2} + C$$

$$f(t) = 2\sqrt{t} - \frac{10}{\sqrt{t}} + c$$

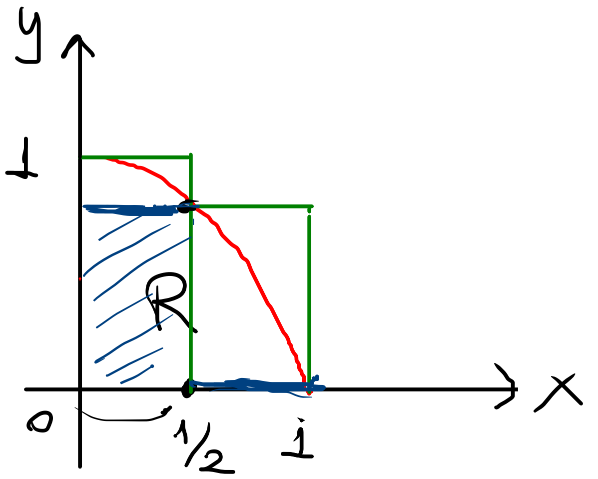
$$\left.\begin{array}{l} t = 4 \\ f(4) = 1 \end{array}\right\} \Rightarrow 1 = 2\sqrt{4} - \frac{10}{\sqrt{4}} + c \Rightarrow 1 = 4 - 5 + c$$

$$c = 2$$

$$f(t) = 2\sqrt{t} - \frac{10}{\sqrt{t}} + 2$$

Belirli integral

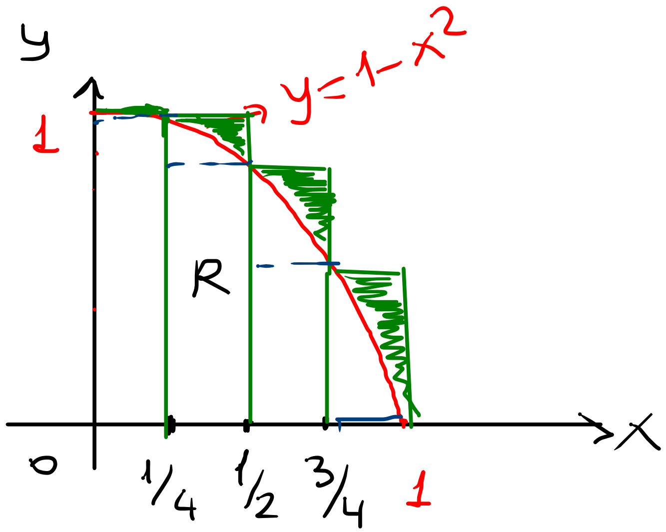
Alan ve Sonlu Toplamlarla Tahminde Bulunmak



x-ekseni üstünde, $y = 1 - x^2$ eğrisinin altında ve $x = 0$, $x = 1$ doğruları arasında kalan R bölgesinin alanını bulmak isteyelim.

[0,1] aralığını iki alt aralığa bölelim. Her bir alt aralığın sol uç noktasını alalım. f en büyük değerini aralıkların sol uç noktasında alır. iki dikdörtgen R bölgesini içine aldığından bu dikdörtgenlerin alanları ile yapılacak olan tahmin gerçek alandan daha büyük olacaktır.

$A \approx f(0)\cdot\frac{1}{2} + f\left(\frac{1}{2}\right)\cdot\frac{1}{2} = 1\cdot\frac{1}{2} + \frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2} = \frac{1}{2} + \frac{3}{8} = \frac{7}{8}$ (iki parçalı)



$A \approx f(0)\cdot\frac{1}{4} + f\left(\frac{1}{4}\right)\cdot\frac{1}{4} + f\left(\frac{1}{2}\right)\cdot\frac{1}{4} + f\left(\frac{3}{4}\right)\cdot\frac{1}{4}$

$\simeq 1\cdot\frac{1}{4} + \left(1-\frac{1}{16}\right)\cdot\frac{1}{4} + \left(1-\frac{1}{4}\right)\cdot\frac{1}{4} + \left(1-\frac{9}{16}\right)\cdot\frac{1}{4}$

$\simeq \frac{1}{4} + \frac{15}{64} + \frac{3}{16} + \frac{7}{64}$

$\cong \frac{25}{32}$ $\longrightarrow$ Tahmin daha iyileşmiş olur. (4 parçalı yaklaşım.

Alanı tahmin etmek için herbir alt aralığın sağ uç noktalarını alalım. $f(x)$ alt aralıkların sağ uç noktalarında en küçük değerlerini alır.

$A \cong f\left(\frac{1}{2}\right)\cdot\frac{1}{2} + f(1)\cdot\frac{1}{2} = \frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2} + 0\cdot\frac{1}{2} = \frac{3}{8}$ (iki parçalı yaklaşım)

$A \cong f\left(\frac{1}{4}\right)\cdot\frac{1}{4} + f\left(\frac{1}{2}\right)\cdot\frac{1}{4} + f\left(\frac{3}{4}\right)\cdot\frac{1}{4} + f(1)\cdot\frac{1}{4}$

$= \left(1-\frac{1}{16}\right)\cdot\frac{1}{4} + \left(1-\frac{1}{4}\right)\cdot\frac{1}{4} + \left(1-\frac{9}{16}\right)\cdot\frac{1}{4} + 0\cdot\frac{1}{4} = \frac{15}{64} + \frac{3}{16} + \frac{7}{64} + 0 = \frac{17}{32}$

iki parçalı yaklaşım için : $\frac{3}{8} < A < \frac{7}{8}$

dört parçalı yaklaşım için : $\frac{17}{32} < A < \frac{25}{32}$

Sigma Notasyonu

$$\sum_{i=1}^{n} i = 1+2+3+\cdots+n = \frac{n(n+1)}{2}$$

$$\sum_{i=1}^{n} i^2 = 1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

$$\sum_{i=1}^{n} i^3 = 1^3+2^3+3^3+\cdots+n^3 = \left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2$$

Tümevarım yöntemi

$P(n)$ bir doğal sayı olayı olsun. $(n \in \mathbb{N})$

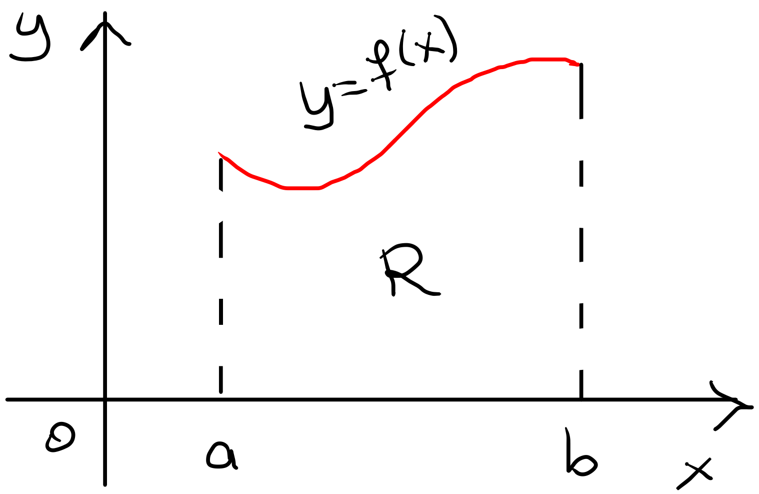
1.) $P(1)$'in doğru olduğu gösterilir.

2) $P(k)$'nın doğru olduğu kabul edilir.

3) $P(k+1)$'in de doğru olduğu ispat edilebiliyor ise

$P(n)$, $\forall n \in \mathbb{N}$ için doğrudur.

Basit Alan Problemi



$y=f(x)$ sürekli ve negatif olmayan bir fonksiyon olmak üzere, f'in grafiği altında, x-ekseninin üzerinde, $x=a$, $x=b$ doğruları $(a<b)$ ile sınırlı R bölgesinin alanını bulalım.

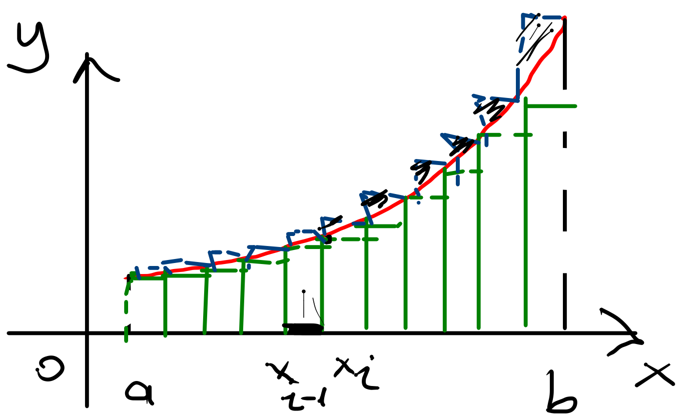
$[a,b]$ aralığını $a=x_0<x_1<x_2<\dots<x_n=b$ olacak şekilde n tane alt aralığa bölelim. Δx_i ile i. alt aralığın yani $[x_{i-1},x_i]$ aralığının uzunluğunu gösterelim.

$$\Delta x_i = x_i - x_{i-1} \qquad (i=1,2,\dots,n)$$

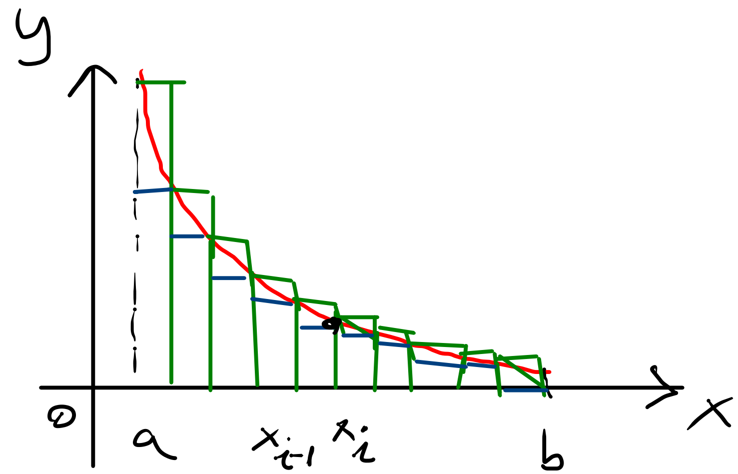
Her bir $[x_{i-1},x_i]$ alt aralığı üzerinde taban uzunluğu Δx_i ve yüksekliği $f(x_i)$ olan dikdörtgenleri alalım. i. dikdörtgenin alanı $A_i = f(x_i)\cdot\Delta x_i$ dir. Bu şekildeki alanlar ile

$$S_n = f(x_1)\Delta x_1 + f(x_2)\Delta x_2 + \cdots + f(x_n)\Delta x_n = \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\cdot\Delta x_i$$

toplamını oluşturalım.



Artan



Azalan

S_n toplamı R bölgesinin alanı için bir yaklaşık değer verir.
Eğer biz en geniş dikdörtgenin Δx_i genişliği sıfıra yaklaşacak şekilde n sayısını arttırarak $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$ noktalarını seçersek en iyi yaklaşımı elde ederiz.
R bölgesinin alanını hesaplamak için $\lim\limits_{\substack{n\to\infty \\ \max \Delta x_i \to 0}} S_n = \lim\limits_{\substack{n\to\infty \\ \max \Delta x_i \to 0}} \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\,\Delta x_i$

limit değeri bulunur.