ÖRNEKLER

1) $\{a_n\} = \{\ln(2n+3) - \ln n\}$ dizisinin limitini bulunuz.

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}\left[\ln(2n+3) - \ln n\right] \overset{\infty-\infty}{=} \lim_{n\to\infty} \ln\left(\frac{2n+3}{n}\right) = \ln\left(\lim_{n\to\infty}\frac{2n+3}{n}\right) = \ln 2$$

2) $\{a_n\} = \{(2^n+5^n)^{1/n}\}$ dizisinin limitini bulunuz.

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}\left[(2^n+5^n)^{1/n}\right] \overset{\infty^0}{=} \lim_{n\to\infty}\left\{\left[5^n\cdot\left(\left(\tfrac{2}{5}\right)^n+1\right)\right]^{1/n}\right\} = \lim_{n\to\infty}\left[5\cdot\left[\left(\tfrac{2}{5}\right)^n+1\right]^{1/n}\right]$$

$$= 5$$

3) $\{a_n\} = \left\{\frac{n.\sin n}{n^2+1}\right\}$ dizisinin limitini bulunuz.

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}\frac{n.\sin n}{n^2+1} = ?$$

$$-1 \leq \sin n \leq 1$$

$$-\frac{n}{n^2+1} \leq \frac{n.\sin n}{n^2+1} \leq \frac{n}{n^2+1}$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n^2+1} = 0$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{-n}{n^2+1} = 0$$

sandaviç teo. göre

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n.\sin n}{n^2+1} = 0 \text{ dır.}$$

4°) $\{a_n\} = \left\{ \frac{e^n}{1-e^n} \right\}$ dizisinin limitini bulunuz.

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{e^n}{1-e^n} \boxed{\overset{\frac{\infty}{\infty}}{=} \lim_{n\to\infty} \frac{e^n}{-e^n} = -1}$$

L'Hospital

1. yol

2-yol

$$\boxed{= \lim_{n\to\infty} \frac{\cancel{e^n}}{\cancel{e^n}(e^{-n}-1)} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{e^{-n}-1} = -1}$$

5°) $\{a_n\} = \left\{ \sqrt{n^2+2n} - n \right\}$ dizisinin limitini bulunuz.

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \left[\sqrt{n^2+2n} - n \right] \overset{\infty-\infty}{=} \lim_{n\to\infty} \frac{\left(\sqrt{n^2+2n}-n\right)\left(\sqrt{n^2+2n}+n\right)}{\sqrt{n^2+2n}+n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\cancel{n^2}+2n-\cancel{n^2}}{\sqrt{n^2+2n}+n}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{2n}{\sqrt{n^2\left(1+\frac{2}{n}\right)}+n} = \lim_{n\to\infty} \frac{2\cancel{n}}{\cancel{n}\left[\sqrt{1+\frac{2}{n}}+1\right]} = \frac{2}{2} = 1$$

TEOREM: Bir $\{a_n\}$ dizisi yakınsak ise sınırlıdır. Ancak teoremin tersi genelde doğru değildir.

Ör/ $\{(-1)^n\} = \{-1, 1, -1, 1, \dots\}$

Alttan -1 ile üstten 1 ile sınırlı bir dizidir.

$$\lim_{n\to\infty} (-1)^n = \begin{cases} -1 & n \text{ tek ise} \\ 1 & n \text{ çift ise} \end{cases} \Rightarrow \text{limit mevcut değildir. Dizi ıraksaktır.}$$

TEOREM: Eğer bir $\{a_n\}$ dizisi monoton artan ve üstten sınırlı (veya monoton azalan ve alttan sınırlı) bir dizi ise yakınsaktır.

Ör/ $a_1 = 1$, $a_{n+1} = \frac{3}{4} + \frac{a_n}{2}$ şeklinde tanımlanan $\{a_n\}$ dizisinin yakınsak olduğunu gösteriniz.

$a_1 = 1 < a_2 = \frac{3}{4} + \frac{1}{2} = \frac{5}{4}$, $\quad a_{n-1} < a_n$ olduğunu kabul edelim.

$a_{n+1} = \frac{3}{4} + \frac{a_n}{2} > \frac{3}{4} + \frac{a_{n-1}}{2} = a_n$ Tümevarım yöntemine göre dizi monoton artandır.

$a_1 = 1 < \frac{3}{2}$ $\quad a_2 = \frac{5}{4} < \frac{3}{2}$ $\quad a_3 = \frac{3}{4} + \frac{5/4}{2} = \frac{3}{4} + \frac{5}{8} = \frac{11}{8} < \frac{3}{2}$ $\quad a_4 = \frac{3}{4} + \frac{11/8}{2} = \frac{3}{4} + \frac{11}{16} = \frac{23}{16} < \frac{3}{2}$

$n=1$ için $a_1 < \frac{3}{2}$ ✓

$n=k$ için $a_k < \frac{3}{2}$ olduğunu kabul edelim.

$n=k+1$ için $a_{k+1} = \frac{3}{4} + \frac{a_k}{2} < \frac{3}{4} + \frac{3/2}{2} = \frac{3}{2} \Rightarrow a_{k+1} < \frac{3}{2}$ olduğundan tümevarım yöntemine göre dizi üstten sınırlıdır.

O halde dizi monoton artan ve üstten sınırlı olduğundan yakınsak bir dizidir.

Bazı önemli limitler

1- Eğer $x>0$ ise $\lim\limits_{n\to\infty} x^{1/n} = 1$'dir.

2- Eğer $|x|<1$ ise $\lim\limits_{n\to\infty} x^n = 0$'dır.

3- Her $\alpha>0$ için $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n^\alpha} = 0$'dır.

4- Her $x\in\mathbb{R}$ için $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{x^n}{n!} = 0$'dır.

5- $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\ln n}{n} = 0$'dır.

6- $\lim\limits_{n\to\infty} n^{1/n} = 1$'dir

7- Her $x\in\mathbb{R}$ için $\lim\limits_{n\to\infty} \left(1+\frac{x}{n}\right)^n = e^x$'dir.

8- $a>1$ için $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a^n}{n} = \infty$

$a>1$ ve $p\in\mathbb{N}$ için $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a^n}{n^p} = \infty$'dur.

SERİLER

$\{a_n\} = \{a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots\}$ dizisinin terimlerinin toplamından oluşan ifadeye seri denir.

serinin genel terimi

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n + \cdots$$ şeklinde gösterilir.

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots \quad , \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n-1}{2n} = \frac{1}{2} + \frac{3}{4} + \frac{5}{6} + \cdots$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} 2^n = 1 + 2 + 2^2 + 2^3 + \cdots$$

Serilerde indisin 1'den başlama zorunluluğu yoktur.

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{k=3}^{\infty} a_{k-2} = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots$$

KISMİ TOPLAMLAR DİZİSİ VE YAKINSAKLIK

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ serisinin $\{S_n\}$ ile göstereceğimiz kısmi toplamlar dizisi aşağıdaki şekildedir.

$$\{S_n\} = \{S_1, S_2, S_3, ---, S_n, ---\}$$

$$S_1 = a_1$$

$$S_2 = a_1 + a_2$$

$$S_3 = a_1 + a_2 + a_3$$

$$\vdots$$

$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + --- + a_n$$

$$\vdots$$

$\sum_{i=1}^{n} S_i = S_1 + S_2 + --- + S_n \rightarrow$ kısmi toplamlar dizisinin n. kısmi toplamı denir.

Eğer kısmi toplamlar dizisi yakınsak ise yani $\lim_{n\to\infty} S_n = S$ limiti mevcut ise o zaman $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ serisi S toplamına yakınsar denir. $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = S$ şeklinde ifade edilir. Eğer $\{S_n\}$ dizisi ıraksak veya limit mevcut değilse seride ıraksaktır denir.

NOT:

- Sonsuz bir serinin baş tarafına sonlu sayıda terim eklemek veya baş tarafından sonlu sayıda terim çıkartmak serinin karakterini değiştirmez.

- Sonsuz bir serinin her terimini sıfırdan farklı bir sabitle çarpmak serinin karakterini değiştirmez.

Geometrik Seriler

$$\sum_{n=0}^{\infty} ar^n = \sum_{n=1}^{\infty} a.r^{n-1} = a + ar + ar^2 + \dots + ar^{n-1} + \dots$$ şeklinde ifade edilen serilerdir.

$r \to$ ortak oran

$$\frac{ar}{a} = \frac{ar^2}{ar} = \frac{ar^3}{ar^2} = \dots = r$$

$S_1 = a$

$S_2 = a + ar$

$S_3 = a + ar + ar^2$

$\vdots$

$S_n = a + ar + ar^2 + \dots + ar^{n-1}$

$\vdots$

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \left[a + ar + ar^2 + \dots + ar^{n-1}\right]$$

$$S_n = a + ar + ar^2 + \dots + ar^{n-1}$$

$$- \quad rS_n = ar + ar^2 + ar^3 + \dots + ar^n$$

$$S_n - rS_n = a - ar^n \Rightarrow S_n = \frac{a(1-r^n)}{1-r}$$

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \frac{a(1-r^n)}{1-r} = \begin{cases} \frac{a}{1-r}, & |r|<1 \text{ ise} \rightarrow \text{seri yakınsaktır.} \\ \infty, & |r|>1 \text{ ise} \rightarrow \text{seri ıraksaktır.} \quad r>1,\ r<-1 \\ \infty, & r=1 \rightarrow \text{seri ıraksaktır.} \\ \text{limit yok}, & r=-1 \rightarrow \text{seri ıraksaktır.} \end{cases}$$

$r=1$

$$S_n = \underbrace{a+a+a+\cdots+a}_{n.a} \Rightarrow \lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty}(n.a) = \infty \text{ ıraksak.}$$

$r=-1$

$$S_n = a-a+a-a+\cdots \Rightarrow \text{limit mevcut değildir, ıraksak.}$$

ÖRNEKLER

1°) $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\cdots = \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$ serisinin toplamını bulunuz.

Bu bir geometrik seridir. $a=1$ $r=\frac{1}{2}$ $\Rightarrow$ $|r|=\frac{1}{2}<1$ olduğundan seri yakınsaktır.

Ve bu serinin toplamı $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} = \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = 2$ olacaktır.

2) $\pi - e + \frac{e^2}{\pi} - \frac{e^3}{\pi^2} + \cdots$ serisinin toplamını bulunuz.

$$\pi - e + \frac{e^2}{\pi} - \frac{e^3}{\pi^2} + \cdots = \pi\left[1 - \frac{e}{\pi} + \frac{e^2}{\pi^2} - \frac{e^3}{\pi^3} + \cdots\right] = \sum_{n=1}^{\infty} \pi \cdot \left(-\frac{e}{\pi}\right)^{n-1}$$ şeklinde bir geometrik seridir.

$\left.\begin{array}{l} a = \pi \\ r = -\frac{e}{\pi} \end{array}\right\} \Rightarrow |r| = \left|-\frac{e}{\pi}\right| = \frac{e}{\pi} < 1$ olduğundan seri yakınsaktır ve toplamı $\sum_{n=1}^{\infty} \pi \cdot \left(-\frac{e}{\pi}\right)^{n-1} = \frac{\pi}{1-\left(-\frac{e}{\pi}\right)}$

$$= \frac{\pi^2}{\pi + e}$$

şeklinde bulunur.

3) $1 + 2^{1/2} + 2 + 2^{3/2} + \cdots$ serisi yakınsak ise toplamını bulunuz.

$$1 + 2^{1/2} + 2 + 2^{3/2} + \cdots = 1 + \sqrt{2} + (\sqrt{2})^2 + (\sqrt{2})^3 + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} (\sqrt{2})^{n-1}$$ bu bir geometrik seridir.

$\left.\begin{array}{l} a = 1 \\ r = \sqrt{2} \end{array}\right\} |r| = |\sqrt{2}| = \sqrt{2} > 1$ olduğundan seri ∞'a ıraksar.

4) $x = 0,323232\ldots$ sayısının iki tamsayının oranı şeklinde ifade edilebileceğini geometrik seriden yararlanarak gösteriniz.