Uygulama ve tekrar

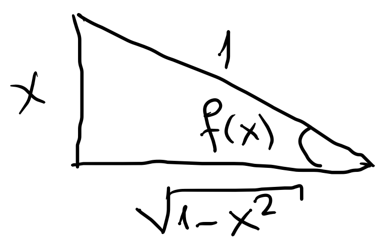
$u = u(x) \Rightarrow y = \arcsin u$

$$y' = \frac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$$

$y = \sin x \rightarrow y' = \cos x$

$y = \arcsin x \Leftrightarrow x = \sin y$

$f(x) = \arcsin x \Leftrightarrow x = \sin y = \sin[f(x)]$



$x = \sin[f(x)] \rightarrow x$'e göre türetelim

$1 = f'(x) . \cos[f(x)]$

$$f'(x) = \frac{1}{\cos[f(x)]} = \frac{1}{\cos(\arcsin x)} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

1) $y = 2^x + \cos^3 x + \arcsin(x \ln x) \Rightarrow y' = ?$

$$y' = 2^x . \ln 2 + 3 . \cos^2 x \cdot (-\sin x) + \frac{(x \ln x)'}{\sqrt{1-(x\ln x)^2}}$$

$$= 2^x \ln 2 - 3 \cos^2 x \sin x + \frac{1}{\sqrt{1-x^2 \ln^2 x}} \cdot \left[\ln x + \cancel{x} . \frac{1}{\cancel{x}}\right]$$

2) $(x^5+x)^y = y^{x+1}$ denklemi ile kapalı olarak verilen $y=f(x)$ fonksiyonu için $y'|_{(1,2)}$ değerini bulunuz.

$$(x^5+x)^y = y^{x+1}$$

$$\ln\left[(x^5+x)^y\right] = \ln\left(y^{x+1}\right)$$

$$y\ln(x^5+x) = (x+1)\cdot\ln y$$

$$y'\cdot\ln(x^5+x) + y\cdot\frac{5x^4+1}{x^5+x} = \ln y + (x+1)\cdot\frac{y'}{y}$$

$$y'\left[\ln(x^5+x) - \frac{(x+1)}{y}\right] = \ln y - y\cdot\frac{5x^4+1}{x^5+x}$$

$$(1,2) \to y'\left[\ln 2 - 1\right] = \ln 2 - \cancel{2}\cdot\frac{6}{\cancel{2}} \Rightarrow y' = \frac{\ln 2 - 6}{\ln 2 - 1}$$

3) $x \neq 0$ ve $a, b \in \mathbb{R}$ olmak üzere $f(x) = ax + \frac{b}{x}$ eğrisine $(3,2)$ noktasında normal olan doğrunun denklemi $y = 11 - 3x$ ise, $b + a$ sayısı nedir?

$y = f(x)$ için (c, d) noktasındaki normal doğrusunun denklemi $$y = -\frac{1}{f'(c)}(x - c) + d \qquad \left\{ y = -\frac{1}{f'(x_0)}(x - x_0) + y_0 \right.$$

$$f'(x) = a - \frac{b}{x^2}$$

$$y = -\frac{1}{a - \frac{b}{9}}(x - 3) + 2$$

$$f'(3) = a - \frac{b}{9}$$

$$\Rightarrow \frac{-(x-3)}{a - \frac{b}{9}} + 2 = 11 - 3x$$

$$-\frac{1}{a - \frac{b}{9}} x + \left[2 + \frac{3}{a - \frac{b}{9}}\right] = 11 - 3x$$

$$3 = \frac{1}{a - \frac{b}{9}} \quad \text{ve} \quad 11 = 2 + \frac{3}{a - \frac{b}{9}}$$

$$3a - \frac{b}{3} = 1 \qquad 9a - b = 3$$

$$f(3) = 2 \Rightarrow 3a + \frac{b}{3} = 2$$

$$9a + b = 6$$

$$\left.\begin{matrix} 9a - b = 3 \\ 9a + b = 6 \end{matrix}\right\}$$

$$\begin{array}{r} 9a - \cancel{b} = 3 \\ 9a + \cancel{b} = 6 \\ \hline 18a = 9 \end{array}$$

$$a = \frac{1}{2}$$

$$b = \frac{3}{2}$$

$$a + b = \frac{1}{2} + \frac{3}{2} = 2$$

4) $\underbrace{f(x)}_{3} = e^{4x} + x^3 + 2$ fonksiyonu için $(f^{-1})'(3) = ?$ $\quad y$

$$\overset{3}{y} = \overset{?}{f(x)} \iff x = f^{-1}(y)$$

$$y = f^{-1}(\underset{3}{x}) \iff x = f(y)$$

$$3 = f(y)$$

$$y = 3 \Rightarrow x = 0$$

$$1 = y' \cdot f'(y)$$

$$y' = \frac{1}{f'(y)} = \frac{1}{4e^{4y} + 3y^2}\Big|_{y=0}$$

$$f'(x) = 4e^{4x} + 3x^2$$

$$= \frac{1}{4}$$

5) $f(x)$ ve $g(x)$ fonksiyonları $x=1$ noktasında türevlenebilir fonk. olmak üzere $f(1)=2$, $g(1)=-3$, $g'(1)=7$, $\left.\frac{d}{dx}\left(\frac{g(x)}{f(x)}\right)\right|_{x=1}=\frac{3}{4}$ olsun. Buna göre $f(x)$'in $x=1$'deki Lineerizasyonunu bulunuz.

$$L(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)=f(1)+f'(1)(x-1)$$

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{g(x)}{f(x)}\right)=\frac{g'(x)\cdot f(x)-f'(x)\cdot g(x)}{[f(x)]^2}$$

$$\left.\frac{d}{dx}\left(\frac{g(x)}{f(x)}\right)\right|_{(x=1)}=\frac{g'(1)\cdot f(1)-f'(1)\cdot g(1)}{[f(1)]^2}=\frac{3}{4}$$

$$\Rightarrow \frac{7\cdot 2-f'(1)\cdot(-3)}{4}=\frac{3}{4}\Rightarrow 14+3f'(1)=3$$

$$f'(1)=\frac{-11}{3}$$

$$\boxed{L(x)=2-\frac{11}{3}(x-1)}$$

6) $f(x) = \arcsin\left(x - \frac{1}{2}\right) - \arccos\left(\ln e^{x}\right) - \operatorname{arccot}(2x)$

$\Rightarrow f\left(\frac{1}{2}\right) = ?$

$$f(1/2) = \arcsin\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\right) - \arccos\left(\frac{1}{2}\right) - \operatorname{arccot}(1)$$

$$= 0 - \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}$$

$$= -\frac{7\pi}{12}$$

7) $f(x) = \begin{cases} \sin(\sin x) & x \geq 0 \\ \frac{1}{x}\sin x^2 & x < 0 \end{cases}$ $x = 0$'da sürekli midir? türevlenebilir midir?

$$f(0) = \sin(\sin 0) = 0$$

$$\lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0^-} \frac{\sin x^2}{x} \overset{\frac{0}{0}}{\underset{L'H}{=}} \lim_{x \to 0^-} \frac{2x \cdot \cos x^2}{1} = 0$$

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} \sin(\sin x) = 0 \qquad f(x) \quad x=0\text{'da sürekli dir.}$$

$$f'_-(0) = f'_+(0)$$

$$f'_-(0) = \lim_{h\to 0^-} \frac{f(0+h)-f(0)}{h} = \lim_{h\to 0^-} \frac{\frac{1}{h}\cdot \sin h^2 - 0}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0^-} \frac{\sin h^2}{h^2} = 1$$

$$=$$

$$f'_+(0) = \lim_{h\to 0^+} \frac{f(0+h)-f(0)}{h} = \lim_{h\to 0^+} \frac{\sin(\sin h) - 0}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0^+} \frac{\cos h \cdot \cos(\sin h)}{1} = 1$$

$f(x)$ $x=0$'da türevlenebilir.

8) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}^-} (\cot x)^{\cos x} \overset{0^0}{=} ?$

$$y = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-} (\cot x)^{\cos x} \Rightarrow \ln y = \ln\left[\lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-} (\cot x)^{\cos x}\right]$$

$$= \lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-} \left[\ln (\cot x)^{\cos x}\right]$$

$$= \lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-} \left[\cos x \,.\, \ln (\cot x)\right] \longrightarrow 0.\infty$$

$$= \lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-} \frac{\ln(\cot x)}{\frac{1}{\cos x}} = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-} \frac{\ln(\cot x)}{\sec x}$$

$$\underset{L'H}{\overset{\frac{\infty}{\infty}}{=}} \lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-} \frac{-\frac{\csc^2 x}{\cot x}}{\sec x \,.\, \tan x} = -\lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-} \frac{\frac{\csc^2 x}{\cancel{\cot x}}}{\frac{\sec x}{\cancel{\cot x}}}$$

$$= -\lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-} \frac{\cos x}{\sin^2 x} = 0 \Rightarrow \ln y = 0 \Rightarrow y = e^0 = 1$$

9) f ve g türevlenebilen fonksiyonlar dır. üzere g fonksiyonu $g(3) = -6$ ve $x \neq 3$ için $g(x) = \dfrac{x^2 - 9}{1 - [f(x)]^3}$ olarak tanımlansın.

$\lim\limits_{x \to 3} g(x)$ L'Hopital kuralı kullanılarak hesaplanabildiğine göre

$f(3) + f'(3)$ toplamını bulunuz.

$$\lim_{x \to 3} g(x) = \lim_{x \to 3} \frac{x^2 - 9}{1 - [f(x)]^3} \overset{\frac{0}{0}}{=} \lim_{x \to 3} \frac{2x}{3[f(x)]^2 \cdot f'(x)} = \frac{6}{-3[f(3)]^2 \cdot f'(3)} = g(3)$$

$$g(3) = -6 \Rightarrow \frac{(-3)^2 - 9}{1 - [f(3)]^3} = -6 \Rightarrow -6 + 6[f(3)]^3 = 0$$

$$[f(3)]^3 = 1$$

$$f(3) = 1$$

$$\frac{6}{-3 \cdot 1 \cdot f'(3)} = -6$$

$$+18 f'(3) = 6 \Rightarrow f'(3) = +\frac{1}{3}$$

$$f(3) + f'(3) = 1 + \frac{1}{3} = 4/3$$

10) $f(x) = \dfrac{\left[\dfrac{1}{x-5} + \dfrac{1}{2}\right](x-1)}{x-3}$ sürekliliğini inceleyiniz.

$$= \frac{[2+(x-5)]\,(x-1)}{2(x-5)(x-3)} = \frac{2x-2+x^2-6x+5}{2(x-5)(x-3)}$$

$$= \frac{x^2-4x+3}{2(x-5)(x-3)} = \frac{\cancel{(x-3)}(x-1)}{2(x-5)\cancel{(x-3)}}$$

$$= \frac{x-1}{2(x-5)}$$

$x=5$'te sonsuz süreksiz.

$\underbrace{\text{kaldırılabilir süreksizlik}}$

$$\lim_{x\to 3} f(x) \neq f(3)$$

11) f türevlenebilen bir fonk. olm. üzere $g(x) = f\left[x^2 f(x) + f(x^2)\right]$ olsun. $f(2)=1$, $f(4)=2$, $f'(2)=4$, $f'(4)=-2$ ve $g(x)$'in $x=2$ noktasındaki teğet doğrusu $y=24x+25$ ise $f'(6)=?$

$$y = g(2) + g'(2)(x-2) = f(6) + 12f'(6)\left[x-2\right] = 12xf'(6) - 24f'(6) + f(6)$$

$$g(2) = f\left[4.f(2)+f(4)\right] = f\left[4.1+2\right] = f(6)$$

$$g'(x) = \left[2x.f(x) + x^2 f'(x) + 2x.f'(x^2)\right].f'\left[x^2 f(x) + f(x^2)\right]$$

$$\Rightarrow g'(2) = \left[4.f(2) + 4f'(2) + 4f'(4)\right].f'\left[4.f(2)+f(4)\right]$$

$$= \left[4.1 + 4.4 + 4.(-2)\right].f'\left[4.1+2\right]$$

$$= 12f'(6)$$

$$12f'(6) = 24 \Rightarrow f'(6) = 2$$

12) $f(x)=\begin{cases} x^3\sin\frac{1}{x^3}, & x\neq 0\\ 1, & x=0\end{cases}$ $\quad f(0)=1 \quad \lim\limits_{x\to 0} x^3\cdot\sin\frac{1}{x^3}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin\frac{1}{x^3}}{1/x^3}=0$

$g(x)=\begin{cases} \frac{1-\cos x}{x^2}, & x\neq 0\\ \frac{1}{2} & x=0\end{cases}$ $\quad g(0)=\frac{1}{2} \quad \lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}\overset{\frac{0}{0}}{=}\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{2x}$

$=\frac{1}{2}=g(0)$

$h(x)=\begin{cases} \frac{1}{x^2}\sin x^2 & x\neq 0\\ 1 & x=0\end{cases}$ $\quad h(0)=1 \quad \lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x^2}{x^2}=1=h(0)$

$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$

13) $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(x+\sqrt{x^2-x}\right) \overset{\infty-\infty}{=} \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{\cancel{x^2}-\cancel{x^2}+x}{x-\sqrt{x^2-x}} = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{x}{x-\sqrt{x^2\left(1-\frac{1}{x}\right)}}$

$$= \lim_{x\to-\infty} \frac{x}{x+x\sqrt{1-\frac{1}{x}}} = \lim_{x\to-\infty} \frac{1}{1+\sqrt{1-\frac{1}{x}}} = \frac{1}{2}$$