Adi Nokta Civarında Seri Çözümler

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$$

diferansiyel denkleminin adi nokta civarında

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$$

şeklinde bir seri çözümünün bulunduğu aşağıdaki teoremle verilir.

Teorem: Eğer $x = x_0$ noktası

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0 \qquad \left[p(x) = \frac{Q(x)}{P(x)}, \quad q(x) = \frac{R(x)}{P(x)} \right]$$

diferansiyel denkleminin bir adi noktası ise $(P(x_0) \neq 0$ ise$)$ o zaman $x = x_0$ noktasının uygun civarında diferansiyel denklemin

$$y = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)^2 + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$$

şeklinde bir seri çözümü bulunur. Bu seri, R yarıçapı, $x = x_0$ adi noktasına en yakın tekil noktaya olan uzaklıktan daha küçük değer alan bir yakınsaklık yarıçapı olmak üzere $0 < |x - x_0| < R$ aralığında yakınsak ve yakınsaklık aralığının $|x - x_0| = R$ uç noktalarında, yakınsak veya ıraksak olabilir. Ayrıca seri $|x-x_0|>R$ aralığında ıraksaktır.

Adi nokta civarında çözüm aranırken çözüm serisinin $a_0, a_1, \dots, a_n, \dots$ gibi sonsuz tane katsayıya bağlı olduğu görülür. Bu katsayılar birbirleri ile belirli bir kuralla bağlantısız olabilecekleri gibi bazen kısmen veya bütün katsayılar iki katsayıya bağlı olarak yazılabilir. Eğer bir çözüm serisinin katsayıları belli kurallarla bağlı ise bu kural veya kurallara rekürans bağıntısı denir.

Ör/ $y''+xy'+y=0$ diferansiyel denkleminin $x=1$ ($\to x_0$) noktası civarında lineer bağımsız iki çözümünü bulunuz.

$P(x)y''+Q(x)y'+R(x)y=0$

$P(x)=1\neq 0$ sbt fonk. Dolayısıyla $\forall x=x_0$ noktası bir adi noktadır.

$$y=\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-1)^n \qquad (a_0\neq 0)$$

$$y'=\sum_{n=1}^{\infty} n a_n (x-1)^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} n a_n (x-1)^{n-1}$$

$$y''=\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n (x-1)^{n-2} = \sum_{n=0}^{\infty} n(n-1) a_n (x-1)^{n-2}$$

$$\Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} n(n-1) a_n (x-1)^{n-2} + x\left[\sum_{n=0}^{\infty} n a_n (x-1)^{n-1}\right] + \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-1)^n = 0$$

$$\Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} n(n-1) a_n (x-1)^{n-2} + x\sum_{n=0}^{\infty} n a_n (x-1)^{n-1} + \sum_{n=0}^{\infty} n a_n (x-1)^{n-1} - \sum_{n=0}^{\infty} n a_n (x-1)^{n-1} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-1)^n = 0$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} n(n-1)a_n(x-1)^{n-2} + x\sum_{n=0}^{\infty} n a_n (x-1)^{n-1} + \sum_{n=0}^{\infty} n a_n (x-1)^{n-1} - \sum_{n=0}^{\infty} n a_n (x-1)^{n-1} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-1)^{n} = 0$$

$$\Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} n(n-1)a_n(x-1)^{n-2} + (x-1)\sum_{n=0}^{\infty} n a_n (x-1)^{n-1} + \sum_{n=0}^{\infty} n a_n (x-1)^{n-1} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-1)^{n} = 0$$

$$\Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} n(n-1)a_n(x-1)^{n-2} + \sum_{n=0}^{\infty} n a_n (x-1)^{n} + \sum_{n=0}^{\infty} n a_n (x-1)^{n-1} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-1)^{n} = 0$$

$$\Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} n(n-1)a_n(x-1)^{n-2} + \sum_{n=0}^{\infty} n a_n (x-1)^{n-1} + \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) a_n (x-1)^{n} = 0$$

$$\Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} n(n-1)a_n(x-1)^{n-2} + \sum_{n=1}^{\infty} (n-1) a_{n-1} (x-1)^{n-2} + \sum_{n=2}^{\infty} (n-1) a_{n-2} (x-1)^{n-2} = 0$$

$$\Rightarrow \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)a_n(x-1)^{n-2} + \sum_{n=2}^{\infty} (n-1) a_{n-1} (x-1)^{n-2} + \sum_{n=2}^{\infty} (n-1) a_{n-2} (x-1)^{n-2} = 0$$

$$\Rightarrow \sum_{n=2}^{\infty} \left[n(n-1)a_n + (n-1)a_{n-1} + (n-1)a_{n-2} \right] (x-1)^{n-2} = 0$$

$\Rightarrow n(n-1)a_n + (n-1)a_{n-1} + (n-1)a_{n-2} = 0$ olmalı.

$n=0 \Rightarrow 0.(-1).a_0 = 0 \Rightarrow a_0 \neq 0$

$n=1 \Rightarrow 1.0.a_1 = 0 \Rightarrow a_1 \neq 0$

$$n(n-1)a_n + (n-1)a_{n-1} + (n-1)a_{n-2} = 0$$

$$\Rightarrow \quad a_n = -\frac{a_{n-1}}{n} - \frac{a_{n-2}}{n} \qquad n \geq 2$$

$$a_2 = -\frac{a_1}{2} - \frac{a_0}{2}$$

$$a_3 = -\frac{a_2}{3} - \frac{a_1}{3} = -\frac{1}{3}(a_2 + a_1) = -\frac{1}{3}\left(-\frac{a_1}{2} - \frac{a_0}{2} + a_1\right) = -\frac{1}{3}\left(\frac{a_1}{2} - \frac{a_0}{2}\right) = \frac{a_0}{6} - \frac{a_1}{6}$$

$$a_4 = \frac{-a_3}{4} - \frac{a_2}{4} = -\frac{1}{4}\left(\frac{a_0}{6} - \frac{a_1}{6}\right) - \frac{1}{4}\left(-\frac{a_1}{2} - \frac{a_0}{2}\right) = -\frac{a_0}{24} + \frac{a_1}{24} + \frac{a_1}{8} + \frac{a_0}{8} = \frac{2a_0}{24} + \frac{4a_1}{24}$$

$$= \frac{a_0}{12} + \frac{a_1}{6}$$

$$a_5 = \frac{-a_4}{5} - \frac{a_3}{5} = -\frac{1}{5}\left(\frac{a_0}{12} + \frac{a_1}{6}\right) - \frac{1}{5}\left(\frac{a_0}{6} - \frac{a_1}{6}\right) = -\frac{a_0}{60} - \cancel{\frac{a_1}{30}} - \frac{a_0}{30} + \cancel{\frac{a_1}{30}} = -\frac{3a_0}{60} = \frac{-a_0}{20}$$

$$\vdots$$

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-1)^n = a_0 + a_1(x-1) + a_2(x-1)^2 + \cdots$$

$$= a_0 + a_1(x-1) + \left(-\frac{a_1}{2} - \frac{a_0}{2}\right)(x-1)^2 + \left(\frac{a_0}{6} - \frac{a_1}{6}\right)(x-1)^3 + \left(\frac{a_0}{12} + \frac{a_1}{6}\right)(x-1)^4 - \frac{a_0}{20}(x-1)^5 + \cdots$$

$$= a_0\left[\underbrace{1 - \frac{(x-1)^2}{2} + \frac{(x-1)^3}{6} + \frac{(x-1)^4}{12} - \frac{(x-1)^5}{20} + \cdots}\right] + a_1\left[\underbrace{(x-1) - \frac{(x-1)^2}{2} - \frac{(x-1)^3}{6} + \frac{(x-1)^4}{6} + \cdots}\right]$$

lineer bağımsız çözümler.