Paydadaki 1. ve 2. dereceden çarpanların tekrarlanması durumu:

Eğer paydadaki $Q(x)$ polinomunun herhangi bir 1. dereceden (Lineer) veya 2. dereceden (kuadratik) çarpanlarından biri örneğin m kez tekrarlanmış ise o zaman $\frac{P(x)}{Q(x)}$'in basit kesirlere ayrılışında bu çarpana karşılık m tane farklı kesir karşı gelecektir.

Bu kesirlerin paydalarının üsleri 1'den m'ye doğru artarken, tekrarlı çarpan lineer ise pay sabit, kuadratik ise pay lineer (1. dereceden) bir fonksiyon olacaktır.

Örneğin; $(x-a_1)$ çarpanı m kez tekrarlansın;

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{P(x)}{(x-a_1)^m (x-a_2)\dots(x-a_n)} = \frac{A_1}{x-a_1} + \frac{A_2}{(x-a_1)^2} + \dots + \frac{A_m}{(x-a_1)^m} + \frac{A_{m+1}}{x-a_2} + \dots + \frac{A_{n+m}}{x-a_n}$$

Ör/
$$\int \frac{dx}{x(x-1)^2} = \int \left[\frac{1}{x} - \frac{1}{x-1} + \frac{1}{(x-1)^2}\right] dx = \int \frac{dx}{x} - \int \frac{dx}{x-1} + \int \frac{dx}{(x-1)^2} = \ln|x| - \ln|x-1| - \frac{1}{x-1} + C$$

$$\frac{1}{x(x-1)^2} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-1} + \frac{C}{(x-1)^2}$$

$$\frac{1}{x(x-1)^2} = \frac{A(x-1)^2 + Bx(x-1) + Cx}{x(x-1)^2} \Rightarrow A(x^2-2x+1) + Bx^2 - Bx + Cx \equiv 1$$

$$(A+B)x^2 + (-2A-B+C)x + A \equiv 1$$

$A=1 \qquad A+B=0 \qquad -2A-B+C=0$

$\qquad\qquad B=-1 \qquad\qquad C=1$

Ör/

$$\int \frac{(x^2+3)}{x^2(x^2+1)^2}\,dx = \int\left[\frac{-6}{x}+\frac{3}{x^2}+\frac{6x-3}{x^2+1}+\frac{6x+4}{(x^2+1)^2}\right]dx = -6\int\frac{dx}{x}+3\int\frac{dx}{x^2}+\frac{6}{2}\int\frac{2x\,dx}{x^2+1}-3\int\frac{dx}{x^2+1}$$

$$+6\int\frac{x\,dx}{(x^2+1)^2}+4\int\frac{dx}{(x^2+1)^2}$$

$$\frac{x^2+3}{x^2(x^2+1)^2}=\frac{A}{x}+\frac{B}{x^2}+\frac{Cx+D}{x^2+1}+\frac{Ex+F}{(x^2+1)^2}$$

$x^2+1=u$

$2x\,dx=du$

$x\,dx=\frac{du}{2}$

$$= -6\ln|x|+3\left(-\frac{1}{x}\right)+3\ln(x^2+1)$$

$$-3\arctan x+6\int\frac{\frac{du}{2}}{u^2}$$

$$x^2+3\equiv Ax(x^2+1)^2+B(x^2+1)^2+(Cx+D)x^2(x^2+1)+(Ex+F).x^2$$

$$x^2+3\equiv Ax(x^4+2x^2+1)+B(x^4+2x^2+1)+(Cx+D)(x^4+x^2)+Ex^3+Fx^2$$

$$x^2+3\equiv Ax^5+2Ax^3+Ax+Bx^4+2Bx+B+Cx^5+Cx^3+Dx^4+Dx^2+Ex^3+Fx^2$$

$$x^2+3\equiv(A+C)x^5+(B+D)x^4+(2A+C+E)x^3+(D+F)x^2+(A+2B)x+B$$

$A+C=0$

$B+D=0$

$2A+C+E=0$

$D+F=1$

$A+2B=0$

$B=3 \Rightarrow A=-6 \Rightarrow C=6 \Rightarrow E=6$

$D=-3 \Rightarrow F=4$

$x=\tan t$

$dx=\sec^2 t\,dt$

$$x^2+3\equiv Ax^5+2Ax^3+Ax+Bx^4+2Bx^2+B+Cx^5+Cx^3+Dx^4+Dx^2+Ex^3+Fx^2$$

$$x^2+3\equiv(A+C)x^5+(B+D)x^4+(2A+C+E)x^3+(2B+D+F)x^2+Ax+B$$

$A=0$ $\quad 2B+D+F=1 \quad B+D=0$

$B=3$ $\quad 2A+C+E=0 \quad A+C=0$

$\Big\}\; A=0,\ C=0,\ E=0$

$B=3,\ D=-3,\ F=-2$

$$\int \frac{x^2+3}{x^2(x^2+1)^2}\,dx = \int\left[\frac{3}{x^2} - \frac{3}{x^2+1} - \frac{2}{(x^2+1)^2}\right]dx = 3\int\frac{dx}{x^2} - 3\int\frac{dx}{x^2+1} - 2\int\frac{dx}{(x^2+1)^2}$$

$x = \tan t \Rightarrow t = \arctan x$

$dx = \sec^2 t\, dt$

$$= -\frac{3}{x} - 3\arctan x - 2\int \frac{\cancel{\sec^2 t}\,dt}{(\sec^2 t)^{\cancel{2}}}$$

$$= \frac{-3}{x} - 3\arctan x - 2\int \cos^2 t\, dt$$

$$= \frac{-3}{x} - 3\arctan x - \cancel{2}\int \frac{1+\cos 2t}{\cancel{2}}\,dt$$

$$= \frac{-3}{x} - 3\arctan x - t - \frac{1}{\cancel{2}}\underbrace{\sin 2t}_{\cancel{2}\sin t\cos t} + C$$

$$= \frac{-3}{2} - 3\arctan x - \arctan x - \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\cdot\frac{1}{\sqrt{1+x^2}} + C$$

$$\int \frac{(x^2+3)}{x^2(x^2+1)^2}\,dx = \int\left[\frac{-6}{x} + \frac{3}{x^2} + \frac{6x-3}{x^2+1} + \frac{6x+4}{(x^2+1)^2}\right]dx$$

$$= -6\int\frac{dx}{x} + 3\int\frac{dx}{x^2} + \frac{6}{2}\int\frac{2x\,dx}{x^2+1} - 3\int\frac{dx}{x^2+1} + 6\int\frac{x\,dx}{(x^2+1)^2} + 4\int\frac{dx}{(x^2+1)^2}$$

$x^2+1=u$

$2x\,dx = du$

$x\,dx = \frac{du}{2}$

$x = \tan t$

$dx = \sec^2 t\,dt$

$t = \arctan x$

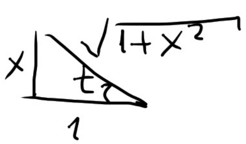
$$= -6\ln|x| + 3\left(-\frac{1}{x}\right) + 3\ln(x^2+1) - 3\arctan x + 6\int\frac{\frac{du}{2}}{u^2} + 4\int\frac{\sec^2 t\,dt}{(\tan^2 t+1)^2} \rightarrow \sec^4 t$$

$$= -6\ln|x| - \frac{3}{x} + 3\ln(x^2+1) - 3\arctan x + 3\left(-\frac{1}{u}\right) + 4\int \cos^2 t\,dt$$

$$= -6\ln|x| - \frac{3}{x} + 3\ln(x^2+1) - 3\arctan x - \frac{3}{x^2+1} + 4\int\frac{1+\cos 2t}{2}\,dt$$

$$= -6\ln|x| - \frac{3}{x} + 3\ln(x^2+1) - 3\arctan x - \frac{3}{x^2+1} + 2\int dt + 2\int \cos 2t\,dt$$

$$= -6\ln|x| - \frac{3}{x} + 3\ln(x^2+1) - 3\arctan x - \frac{3}{x^2+1} + 2t + \sin 2t + C$$



$$= -6\ln|x| - \frac{3}{x} + 3\ln(x^2+1) - 3\arctan x - \frac{3}{x^2+1} + 2\arctan x + 2\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\cdot\frac{1}{\sqrt{1+x^2}} + C$$

Öd/

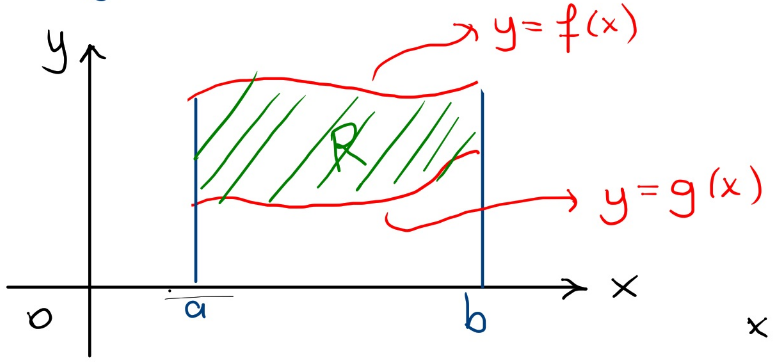
$$\int\frac{x^2+2}{4x^5+4x^3+x}\,dx$$

$x(4x^4+4x^2+1)$

$x(2x^2+1)^2$

Düzlemsel bölgelerin alanları

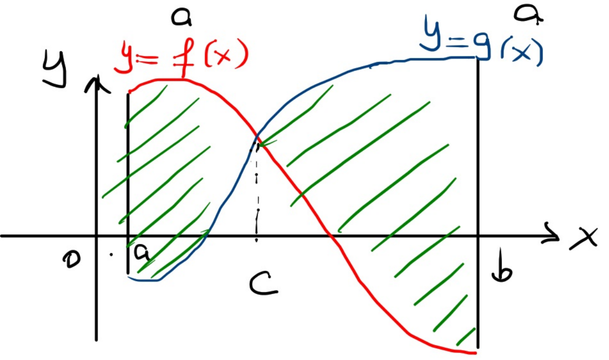
iki eğri arasındaki alan



Bir düzlemsel R bölgesinin $y=f(x)$, $y=g(x)$ sürekli fonksiyonlarının grafiği ve düşey $x=a$, $x=b$ doğruları ile sınırlandığını kabul edelim. $[a,b]$ aralığında $g(x) \leq f(x)$ olduğunu da kabul edelim. Bu durumda g'nin grafiği f'in grafiğinin altında kalacaktır.

Eğer $[a,b]$'de $g(x) \geq 0$ ise o zaman R bölgesinin alanı x-ekseninin üzerinde ve f'in grafiğinin altında kalan alandan x-ekseninin üzerinde ve g'nin grafiğinin altında kalan alanın çıkarılmasıyla elde edilir.

$$A = \int_a^b f(x)\,dx - \int_a^b g(x)\,dx = \int_a^b [f(x) - g(x)]\,dx$$



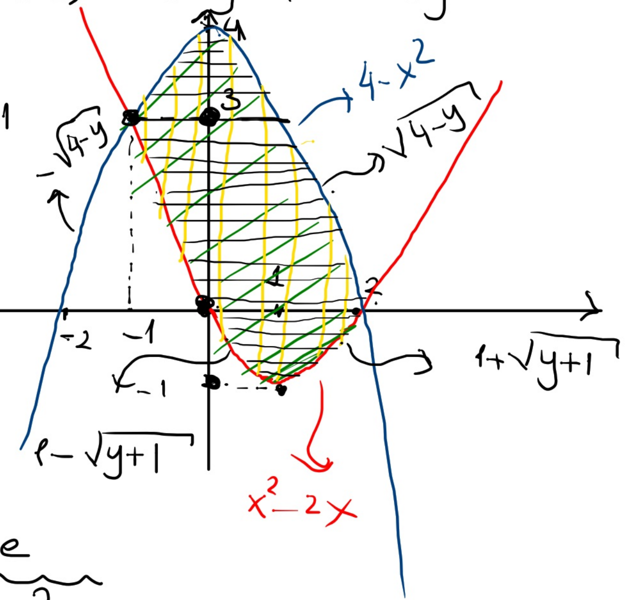
$$A = \int_a^b |f(x) - g(x)|\,dx$$

ÖRNEKLER $\rightarrow x = 1 \mp \sqrt{y+1}$

1) $y = x^2 - 2x$ ve $y = 4 - x^2$ eğrileri arasında kalan sınırlı düzlemsel R bölgesinin alanını bulunuz.

$y = x^2 - 2x$
$= (x-1)^2 - 1$

$y = 4 - x^2$
$x^2 = 4 - y$
$x = \mp\sqrt{4-y}$



NOT: (Düzgün bölge)

Eksenlere dik doğrularla bölge tarandığında doğrular hep aynı eğriler arasında kalıyorsa bölgeye düzgün bölge denir.

Örnekteki grafikte sarı doğrular hep kırmızı ve mavi eğriler arasındadır. Dolayısıyla R bölgesi x-eksenine dik olan sarı doğrulara göre düzgündür. Ancak y-eksenine dik olan siyah doğrular önce iki kırmızı, sonra kırmızı ve mavi, daha sonra da mavi ve kırmızı eğriler arasında kaldığından R bölgesi y-eksenine göre düzgün değildir.

$$x^2 - 2x = 4 - x^2 \Rightarrow 2x^2 - 2x - 4 = 0$$
$$x^2 - x - 2 = 0$$
$$(x-2)(x+1) = 0$$
$$x = 2 \quad x = -1$$

x'e göre

$$A = \int_{-1}^{2} \left(4 - x^2 - (x^2 - 2x)\right) dx$$

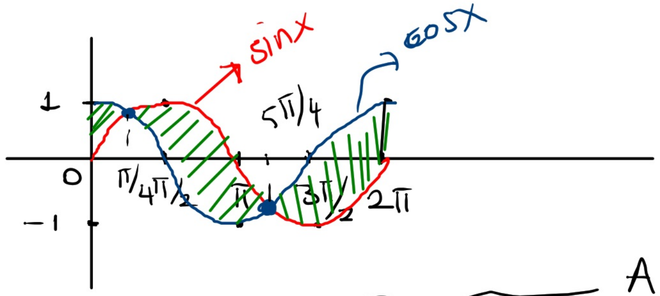
$$= \int_{-1}^{2} (-2x^2 + 2x + 4)\, dx = -2\frac{x^3}{3} + x^2 + 4x \Big|_{-1}^{2}$$

$$= -\frac{2}{3}(8+1) + (4-1) + 4\left(2-(-1)\right) = -\frac{2}{\cancel{3}}\overset{3}{\cancel{9}} + 3 + 12 = 9 \text{ br}^2$$

y'ye göre

$$A = \int_{-1}^{0} \left[\left(1+\sqrt{y+1}\right) - \left(1-\sqrt{y+1}\right)\right] dy + \int_{0}^{3} \left[\sqrt{4-y} - \left(1-\sqrt{y+1}\right)\right] dy + \int_{3}^{4} \left[\sqrt{4-y} - \left(-\sqrt{4-y}\right)\right] dy$$

2) $x=0$'dan $x=2\pi$'ye $y=\sin x$ ve $y=\cos x$ eğrileri arasında kalan toplam alanı bulunuz.



$$\sin x = \cos x \Rightarrow \frac{\sin x}{\cos x} = 1 \qquad \tan x = 1$$

$$x = \frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{4} \in [0, 2\pi]$$

$$A = \int_0^{2\pi} |\sin x - \cos x|\, dx = \int_0^{\pi/4} (\cos x - \sin x)\, dx + \int_{\pi/4}^{5\pi/4} (\sin x - \cos x)\, dx + \int_{5\pi/4}^{2\pi} (\cos x - \sin x) dx$$

$$= \sin x + \cos x \Big|_0^{\pi/4} + (-\cos x - \sin x)\Big|_{\pi/4}^{5\pi/4} + (\sin x + \cos x)\Big|_{5\pi/4}^{2\pi}$$

$$= \left[\left(\frac{\sqrt2}{2} + \frac{\sqrt2}{2}\right) - (0+1)\right] - \left[\left(-\frac{\sqrt2}{2} - \frac{\sqrt2}{2}\right) - \left(\frac{\sqrt2}{2} + \frac{\sqrt2}{2}\right)\right] + \left[(0+1) - \left(-\frac{\sqrt2}{2} - \frac{\sqrt2}{2}\right)\right]$$

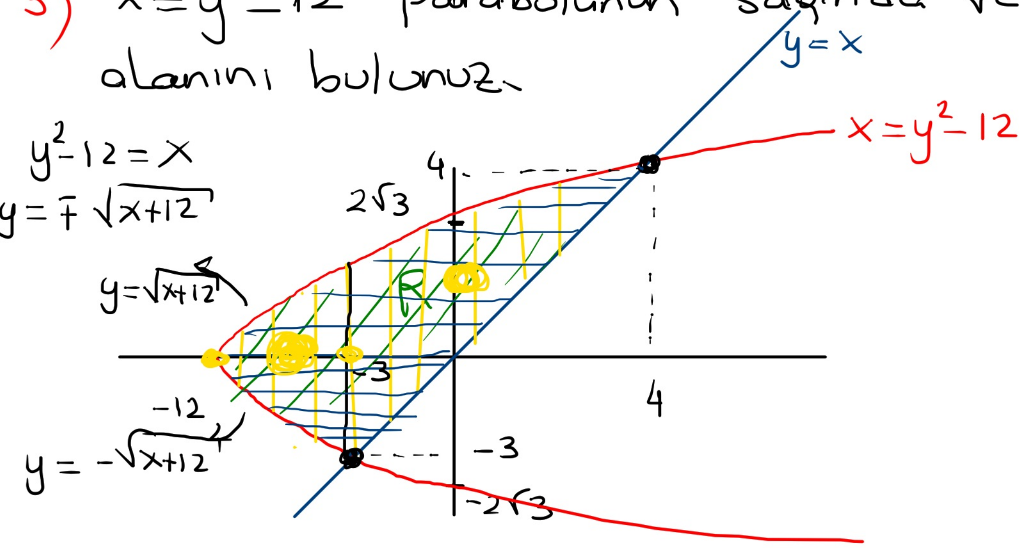
$$= (\sqrt2 - 1) - (-2\sqrt2) + (1 + \sqrt2)$$

$$= 4\sqrt2 \text{ br}^2$$

3) $x=y^2-12$ parabolünün sağında ve $y=x$ doğrusunun solunda kalan düzlemsel bölgenin alanını bulunuz.

$y^2-12=x$

$y=\mp\sqrt{x+12}$



R bölgesi x'e göre düzgün değildir.

R bölgesi y'ye göre düzgündür

$$A=\int_{-3}^{4}\left[y-(y^2-12)\right]dy=\frac{y^2}{2}-\frac{y^3}{3}+12y\Big|_{-3}^{4}=\frac{343}{6}\ br^2$$

$$A=\int_{-12}^{-3}\left[\sqrt{x+12}-\left(-\sqrt{x+12}\right)\right]dx+\int_{-3}^{4}\left[\sqrt{x+12}-x\right]dx$$

$y^2-12=y$

$y^2-y-12=0$

$(y-4)(y+3)=0$

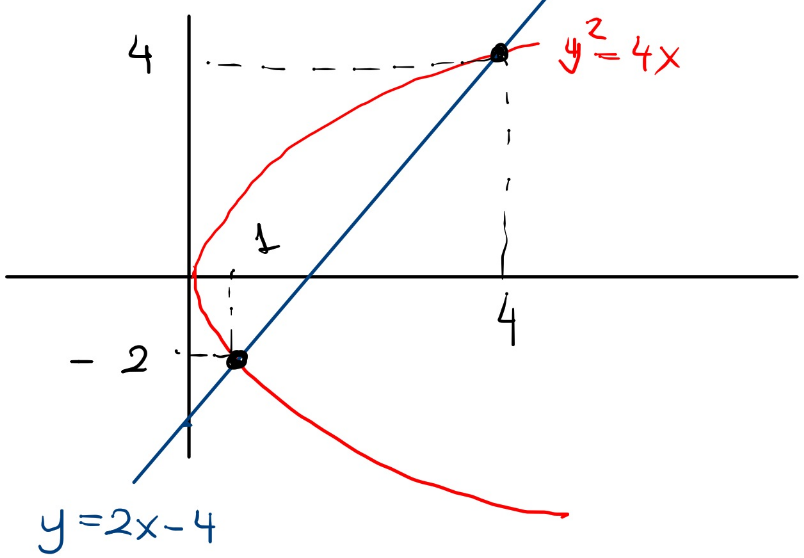
$y=4 \quad y=-3$

$x = \frac{y^2}{4}$

Ör/ $y^2 = 4x$ eğrisi ile $y = 2x-4$ doğrusu arasındaki alanı hesaplayınız.

$x = \frac{y+4}{2}$

y'ye göre düzgün.



$(2x-4)^2 = 4x \Rightarrow 4x^2 - 16x + 16 = 4x$

$\Rightarrow 4x^2 - 20x + 16 = 0 \Rightarrow x^2 - 5x + 4 = 0$

$(x-1)(x-4) = 0$

$x = 1 \quad x = 4$

$$A = \int_{-2}^{4} \left[\frac{y+4}{2} - \frac{y^2}{4} \right] dy$$

$\underbrace{\text{x'e göre düzgün}}_{?}$