Uygulama

1) $f(x,y,z) = x^2+y^2+z^2$ fonksiyonu için

a) $\nabla f(x,y,z) = ?$, $\nabla f(1,-1,2) = ?$

b) f'in $(1,-1,2)$ noktasındaki maksimum artış oranını bulunuz.

c) $x^2+y^2+z^2=6$ küresinin $(1,-1,2)$ noktasındaki teğet düzleminin denklemini bulunuz.

d) f'in $(1,-1,2)$ noktasında, bu noktadan $(3,1,1)$ noktasına doğru ölçülen yöndeki değişim oranını bulunuz.

a) $\nabla f(x,y,z) = \frac{\partial f}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial f}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial f}{\partial z}\vec{k} = 2x\vec{i} + 2y\vec{j} + 2z\vec{k}$

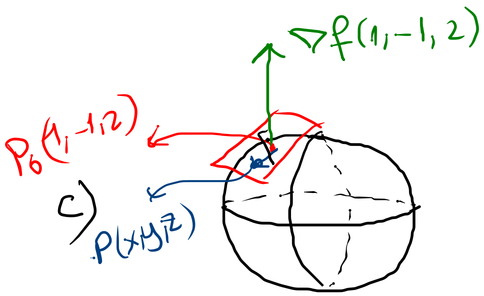
$\nabla f(1,-1,2) = 2\vec{i} - 2\vec{j} + 4\vec{k}$

$\vec{u}$, ∇f'e paralel olduğunda maksimum artış elde edilir.

b) $D_{\vec{u}} f(1,-1,2) = \nabla f(1,-1,2) \cdot \underset{\substack{\downarrow \\ \text{birim} \\ \text{vekt.}}}{\vec{u}} = |\nabla f(1,-1,2)| \cdot \underbrace{|\vec{u}|}_{=1} \cdot \underbrace{\cos\theta}_{\substack{\theta=0 \\ =1}}$

$= |\nabla f(1,-1,2)| = \sqrt{4+4+16} = 2\sqrt{6}$

c)



$\overrightarrow{P_0P} \perp \nabla f \Rightarrow \nabla f(1,-1,2) \cdot \overrightarrow{P_0P} = 0$

$(2\vec{i} - 2\vec{j} + 4\vec{k}) \cdot \left[(x-1)\vec{i} + (y+1)\vec{j} + (z-2)\vec{k}\right] = 0$

$(2x-2)-2(y+1)+4(z-2)=0$

$2x-2y+4z-12=0$

$\boxed{x-y+2z=6}$

d) $(1,-1,2)\rightarrow(3,1,1) \Rightarrow \vec{u}=2\vec{i}+2\vec{j}-\vec{k}$

$D_{\vec{u}}f(1,-1,2)=\nabla f(1,-1,2)\cdot\frac{\vec{u}}{|\vec{u}|}=(2\vec{i}-2\vec{j}+4\vec{k}).\frac{(2\vec{i}+2\vec{j}-\vec{k})}{\sqrt{4+4+1}}=\frac{4-4-4}{3}=\frac{-4}{3}$

2) $\vec{r}(t)=\ln t\,\vec{i}+2t\vec{j}+t^2k$ eğrisinin $[1,e]$ kapalı aralığında kalan kısmının yay uzunluğunu bulunuz.

$\vec{r}\,'(t)=\frac{1}{t}\vec{i}+2\vec{j}+2t\vec{k}$

$L=\int_{t_1}^{t_2}|\vec{r}\,'(t)|\,dt \Rightarrow L=\int_1^e\sqrt{\left(\frac{1}{t}\right)^2+2^2+(2t)^2}\,dt=\int_1^e\sqrt{\left(2t+\frac{1}{t}\right)^2}\,dt=\int_1^e\left(2t+\frac{1}{t}\right)dt$

$=t^2+\ln|t|\Big|_1^e=(e^2+\overset{1}{\cancel{\ln e}})-(1+\overset{0}{\cancel{\ln 1}})$

$=e^2$

3) Yer vektörü $\vec{r}(t)=(3-e^t)\vec{i}+[1+\cos(t+\pi)]\vec{j}+e^t\vec{k}$ $\left(t\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)\right)$ olan eğrinin $x+2y+z=3$ düzlemini kestiği noktayı bulunuz ve bu noktada eğrinin teğeti ile

düzlemin normali arasındaki açıyı hesaplayınız.

$\vec{r}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k}$

$\vec{r}(t) = (3-e^t)\vec{i} + [1+\cos(t+\pi)]\vec{j} + e^t\vec{k}$

$x(t) = 3-e^t$

$y(t) = 1+\cos(t+\pi)$

$z(t) = e^t$

$x+2y+z=3 \Rightarrow \cancel{3}-\cancel{e^t}+2[1+\cos(t+\pi)]+\cancel{e^t} = \cancel{3}$

$2+2\cos(t+\pi) = 0 \Rightarrow \cos(t+\pi) = -1 = \cos\pi$

$t+\pi = \pi \Rightarrow t = 0 \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$

$t=0 \Rightarrow x = 3-e^0 = 2$

$y = 1+\cos\pi = 0$

$z = e^0 = 1$

$t=0 \rightarrow (2,0,1)$

eğrinin teğet vektörü

$\frac{d\vec{r}}{dt} = -e^t\vec{i} - \sin(t+\pi)\vec{j} + e^t\vec{k}$

$\left.\frac{d\vec{r}}{dt}\right|_{t=0} = -\vec{i} + \vec{k}$

Düzlemin normali : $\vec{n} = \vec{i} + 2\vec{j} + \vec{k}$

$\frac{d\vec{r}}{dt} \cdot \vec{n} = \left|\frac{d\vec{r}}{dt}\right| \cdot |\vec{n}| \cdot \cos\theta$

$-1+1 = \sqrt{2} \cdot \sqrt{6} \cdot \cos\theta$

$\cos\theta = 0 \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{2}$

4) $z=\sqrt{xy}+\arcsin\frac{x}{2}$ fonksiyonunun tanım kümesini bulunuz ve düzlemde gösteriniz.

$xy \geq 0$

1°) $x \geq 0$, $y \geq 0$

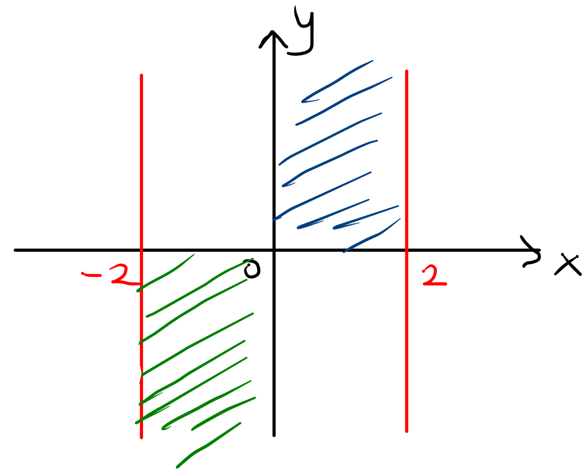
$0 \leq x \leq 2$, $y \geq 0$

2°) $x \leq 0$, $y \leq 0$

$-2 \leq x \leq 0$, $y \leq 0$

$-1 \leq \frac{x}{2} \leq 1$

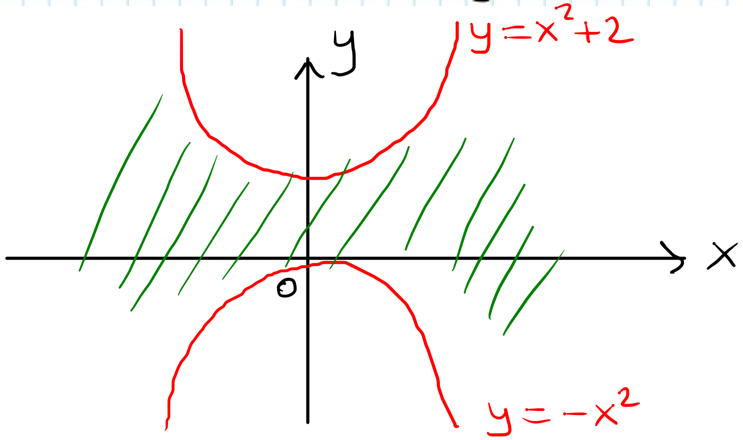
$-2 \leq x \leq 2$



5) $z=\arccos\frac{y-1}{x^2+1}$ fonksiyonunun tanım kümesini bulunuz ve düzlemde gösteriniz.

$$-1 \leq \frac{y-1}{x^2+1} \leq 1 \Rightarrow -x^2-1 \leq y-1 \leq x^2+1$$

$$-x^2 \leq y \leq x^2+2$$



6) $f(x,y) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{y} & y \neq 0 \\ 0 & y = 0 \end{cases}$ fonksiyonunun $(0,0)$ noktasında sürekliliğini inceleyiniz.

$$f(0,0) = 0$$

$$-1 \leq \sin \frac{1}{y} \leq 1$$

$$-x^2 \leq x^2 \sin \frac{1}{y} \leq x^2$$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} -x^2 = 0 \\ \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} x^2 = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow$$ sandaviç teo. göre $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} x^2 \sin \frac{1}{y} = 0 = f(0,0)$ olduğundan fonksiyon $(0,0)$ noktasında süreklidir.

7) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x-y}{x+y}$ limitinin varlığını inceleyiniz.

$$\underbrace{\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x-y}{x+y} = \lim_{x\to 0}\left[\lim_{y\to 0} \frac{x-y}{x+y}\right] = \lim_{x\to 0} \frac{x}{x} = 1}, \quad \underbrace{\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x-y}{x+y} = \lim_{y\to 0}\left[\lim_{x\to 0} \frac{x-y}{x+y}\right] = \lim_{y\to 0} \frac{-y}{y} = -1}$$

$$1 \neq -1$$

Farklı yollardan alınan limitler farklı çıktığından limit mevcut değildir.

8) $f(x,y)=\dfrac{1-\sin x}{x-\cos y}$ ile verilen fonksiyonun $(0,\pi)$ noktasındaki limitini bulunuz.

$$\lim_{(x,y)\to(0,\pi)} \frac{1-\sin x}{x-\cos y} = \frac{1-\sin 0}{0-\underbrace{\cos\pi}_{-1}} = \frac{1}{1} = 1$$

9) $f(x,y)=\dfrac{x^2-y^2+2y-1}{x^2+2xy+y^2-1}$ ile verilen fonksiyonun $(0,1)$ noktasındaki limitini bulunuz.

$$\lim_{(x,y)\to(0,1)} \frac{x^2-y^2+2y-1}{x^2+2xy+y^2-1} = \frac{0-1+2-1}{0+0+1-1} = \frac{0}{0}$$

$$\lim_{(x,y)\to(0,1)} \frac{x^2-y^2+2y-1}{x^2+2xy+y^2-1} = \lim_{(x,y)\to(0,1)} \frac{x^2-(y-1)^2}{(x+y)^2-1} = \lim_{(x,y)\to(0,1)} \frac{(x-y+1)\cancel{(x+y-1)}}{\cancel{(x+y-1)}(x+y+1)} = \lim_{(x,y)\to(0,1)} \frac{x-y+1}{x+y+1}$$

$$= \frac{0}{2} = 0$$

10) $f(x,y)=\begin{cases} (x^3+y)\sin\dfrac{1}{x^2+y^2} & (x,y)\neq(0,0) \\ 0 & (x,y)=(0,0) \end{cases}$ fonksiyonu için $\dfrac{\partial f(0,0)}{\partial x}$ ve $\dfrac{\partial f(0,0)}{\partial y}$ türevlerinin varlığını araştırınız.

$$\frac{\partial f(0,0)}{\partial x} = \lim_{h\to 0} \frac{f(0+h,0)-f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{(h^3+0)\sin\frac{1}{h^2+0} - 0}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{h^3 \cdot \sin\frac{1}{h^2}}{\cancel{h}} = \lim_{h\to 0} h^2 \cdot \sin\frac{1}{h^2} = 0$$

$$\frac{\partial f(0,0)}{\partial y} = \lim_{k\to 0} \frac{f(0,0+k)-f(0,0)}{k} = \lim_{k\to 0} \frac{(0+k)\cdot\sin\frac{1}{0+k^2} - 0}{k} = \lim_{k\to 0} \frac{\cancel{k}\sin\frac{1}{k^2}}{\cancel{k}} = \lim_{k\to 0} \sin\frac{1}{k^2}$$

limit mevcut değildir.

11) f tek değişkenli bir fonksiyon olmak üzere $z=f(x^2-y^2)$ fonksiyonunun

$$y\frac{\partial z}{\partial x} + x\frac{\partial z}{\partial y} = 0$$

denklemini sağladığını gösteriniz.

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial z}{\partial x} &= 2x \cdot f'(x^2-y^2) \\ \frac{\partial z}{\partial y} &= -2y\, f'(x^2-y^2) \end{aligned}\right\} \Rightarrow y\cdot\frac{\partial z}{\partial x} + x\cdot\frac{\partial z}{\partial y} = y\cdot\left[2x\, f'(x^2-y^2)\right] + x\left[-2y\, f'(x^2-y^2)\right]$$

$$= (2xy - 2xy)\, f'(x^2-y^2) = 0$$

12) $f(x,y) = \ln(y+\ln x)$ $\qquad f_x(x,y) = ?\qquad f_y(x,y) = ?$

$$f_x(x,y) = \frac{1/x}{y+\ln x} = \frac{1}{x(y+\ln x)} \qquad f_y(x,y) = \frac{1}{y+\ln x}$$

13) $f(x,y) = x^2 \arctan\frac{y}{x} - y^2 \arctan\frac{x}{y}$ $\qquad f_{xy} = ?$

$$f_x(x,y) = 2x\arctan\frac{y}{x} + x^2 \cdot \frac{-y/x^2}{1+\frac{y^2}{x^2}} - y^2 \cdot \frac{1/y}{1+\frac{x^2}{y^2}} = 2x\arctan\frac{y}{x} - \frac{x^2 y}{x^2+y^2} - \frac{y^3}{x^2+y^2}$$

$$= 2x\arctan\frac{y}{x} - \frac{y\,\cancel{(x^2+y^2)}}{\cancel{x^2+y^2}} = 2x\arctan\frac{y}{x} - y$$

$$f_{xy}(x,y) = 2x \cdot \frac{1/x}{1+\frac{y^2}{x^2}} - 1 = \frac{2x^2}{x^2+y^2} - 1 = \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$$

14) $f(x,y) = F(e^{x+y}) + G(\ln(x+y))$ ise, bu şekildeki her f fonksiyonunun $f_x - f_y = 0$ denklemini sağladığını gösteriniz.

$$\left.\begin{array}{l} u = e^{x+y} \\ v = \ln(x+y) \end{array}\right\} \quad f(u,v) = F(u) + G(v)$$

$$f_x = \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial x} = F'(e^{x+y}) \cdot e^{x+y} + G'(\ln(x+y)) \cdot \frac{1}{x+y}$$

$$f_y = \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial y} = F'(e^{x+y}) \cdot e^{x+y} + G'(\ln(x+y)) \cdot \frac{1}{x+y}$$

15) $z = f(u,v)$ fonksiyonu için $x \cdot \frac{\partial z}{\partial x} + y \cdot \frac{\partial z}{\partial y} = z$ denkleminin $u = x$, $v = \frac{y}{x}$ olduğunda u ve v değişkenlerine göre alacağı şekli bulunuz.

$x = u \Rightarrow y = u \cdot v$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial x}$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial u} \cdot 1 + \frac{\partial z}{\partial v} \cdot \left(\frac{-y}{x^2}\right)$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial z}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial y}$$

$$= \frac{\partial z}{\partial u} \cdot 0 + \frac{\partial z}{\partial v} \cdot \frac{1}{x}$$

$$u \cdot \left[\frac{\partial z}{\partial u} - \frac{\partial z}{\partial v} \cdot \frac{uv}{u^2}\right] + \cancel{u} v \cdot \frac{1}{\cancel{u}} \frac{\partial z}{\partial v} = z$$

$$u \frac{\partial z}{\partial u} - v \cancel{\frac{\partial z}{\partial v}} + v \cancel{\frac{\partial z}{\partial v}} = z$$

$$u \cdot \frac{\partial z}{\partial u} = z$$

16) $\arctan(e^z) = x + yz$ denklemi ile kapalı olarak verilen $z = f(x,y)$ fonksiyonunun $(\frac{\pi}{4}, 1, 0)$ noktasında $\frac{\partial z}{\partial x}$ ve $\frac{\partial z}{\partial y}$ türevlerini bulunuz. $\arctan(e^z) = x + yz \Rightarrow F(x,y,z) = \arctan(e^z) - x - yz = 0$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{\partial F/\partial x}{\partial F/\partial z} = -\frac{-1}{\frac{e^z}{1+e^{2z}} - y} = \frac{1+e^{2z}}{e^z - y(1+e^{2z})}$$

$$\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{(\frac{\pi}{4},1,0)} = \frac{2}{1-2} = -2$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{\partial F/\partial y}{\partial F/\partial z} = -\frac{-z}{\frac{e^z}{1+e^{2z}} - y} = \frac{z(1+e^{2z})}{e^z - y(1+e^{2z})}$$

$$\left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_{(\frac{\pi}{4},1,0)} = \frac{0 \cdot 2}{1-2} = 0$$

17) $f(x,y,z) = x^2 + 2y^2 + 3z$ fonksiyonunun $M(1,2,0)$ noktasını $N(2,4,2)$ noktasına birleştiren $\overrightarrow{MN}$ yönündeki doğrultu türevinin $M(1,2,0)$ noktasındaki değerini bulunuz.

$\overrightarrow{MN} = \vec{i} + 2\vec{j} + 2\vec{k}$ $\quad \nabla f = 2x\vec{i} + 4y\vec{j} + 3\vec{k}$ $\quad \nabla f(1,2,0) = 2\vec{i} + 8\vec{j} + 3\vec{k}$

$$D_{\overrightarrow{MN}} f(1,2,0) = \nabla f(1,2,0) \cdot \frac{\overrightarrow{MN}}{|\overrightarrow{MN}|} = (2\vec{i} + 8\vec{j} + 3\vec{k}) \cdot \frac{(\vec{i} + 2\vec{j} + 2\vec{k})}{\sqrt{1+4+4}} = \frac{2+16+6}{3} = \frac{24}{3} = 8$$