Kutupsal Eğrinin Uzunluğu

$r=f(\theta)$ $\alpha\le\theta\le\beta$ eğrisinin uzunluğu için kutupsal koordinat formülünü parametrize ederek bulabiliriz.

$$\left.\begin{array}{l} x=r\cos\theta \Rightarrow x=f(\theta)\cos\theta \\ y=r\sin\theta \Rightarrow y=f(\theta)\sin\theta \end{array}\right\} \quad \alpha\le\theta\le\beta$$

parametrizasyon

$$\frac{dx}{d\theta}=f'(\theta)\cos\theta-f(\theta)\sin\theta$$

$$\frac{dy}{d\theta}=f'(\theta)\sin\theta+f(\theta)\cos\theta$$

$$S=\int_\alpha^\beta\sqrt{\left(\frac{dx}{d\theta}\right)^2+\left(\frac{dy}{d\theta}\right)^2}\,d\theta$$

$$=\int_\alpha^\beta\sqrt{[f'(\theta)\cos\theta-f(\theta)\sin\theta]^2+[f'(\theta)\sin\theta+f(\theta)\cos\theta]^2}\,d\theta$$

$$=\int_\alpha^\beta\sqrt{[f'(\theta)]^2\cos^2\theta\cancel{-2f(\theta)f'(\theta)\sin\theta\cos\theta}+[f(\theta)]^2\sin^2\theta+[f'(\theta)]^2\sin^2\theta\cancel{+2f(\theta)f'(\theta)\sin\theta\cos\theta}+[f(\theta)]^2\cos^2\theta}\,d\theta$$

$$=\int_\alpha^\beta\sqrt{[f'(\theta)]^2+[f(\theta)]^2}\,d\theta$$

$$\boxed{S=\int_\alpha^\beta\sqrt{(r')^2+r^2}\,d\theta}$$

~~ör~~ $r = 1-\cos\theta$ eğrisinin uzunluğunu bulunuz.

$T = 2\pi$, 2π'ye eşit uzunlukta bir aralıkta inceleme yapılır.

.... veya $[-2\pi, 0]$ veya $[-\pi, \pi]$ veya $[0, 2\pi]$ veya ....

1°) $\theta \to -\theta$

$r = 1-\cos(-\theta) = 1-\cos\theta = r$

k.E simetri eksenidir. İnceleme sadece pozitif değerler için yapılır.

İnc. aralığı $[0, \pi]$

2°) $\theta \to \pi-\theta$

$$r = 1-\cos(\pi-\theta) = 1-(\underbrace{\cos\pi}_{-1}\cos\theta + \cancelto{0}{\sin\pi}\sin\theta)$$

$$= 1+\cos\theta$$
$$\neq r$$
$$\neq -r$$

3°) $\theta \to \pi+\theta$

$$r = 1-\cos(\pi+\theta) = 1-(\underbrace{\cos\pi}_{-1}\cos\theta - \cancelto{0}{\sin\pi}\sin\theta)$$

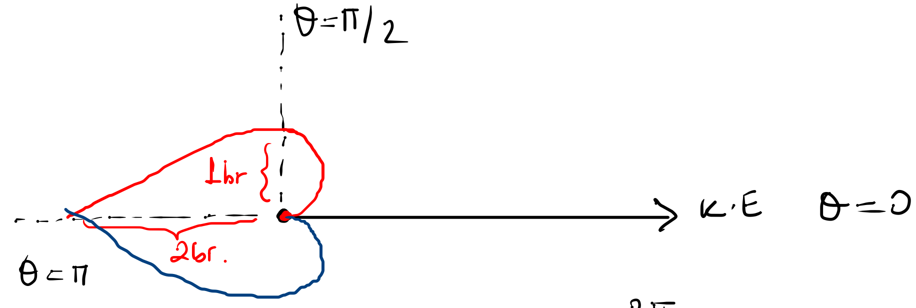
$$= 1+\cos\theta$$
$$\neq r$$
$$\neq -r$$

$r' = \sin\theta > 0 \qquad \theta \in [0, \pi]$

$r = 0 \Rightarrow 1-\cos\theta = 0 \Rightarrow \cos\theta = 1 \Rightarrow \theta = 0$

$\theta = 0 \Rightarrow r = 1-\cos 0 \Rightarrow r = 0$

θ	0		$\pi/2$		π
r'		$+$		$+$	
r	0	$\nearrow$	1	$\nearrow$	2



$r = 1-\cos\theta$

$r' = \sin\theta$

$$S=\int_0^{2\pi}\sqrt{(r')^2+r^2}\,d\theta=\int_0^{2\pi}\sqrt{(\sin\theta)^2+(1-\cos\theta)^2}\,d\theta$$

$$=\int_0^{2\pi}\sqrt{\sin^2\theta+1-2\cos\theta+\cos^2\theta}\,d\theta$$

$$=\int_0^{2\pi}\sqrt{2-2\cos\theta}\,d\theta=\sqrt{2}\int_0^{2\pi}\sqrt{1-\cos\theta}\,d\theta$$

$$=\sqrt{2}\int_0^{2\pi}\sqrt{2\sin^2\frac{\theta}{2}}\,d\theta$$

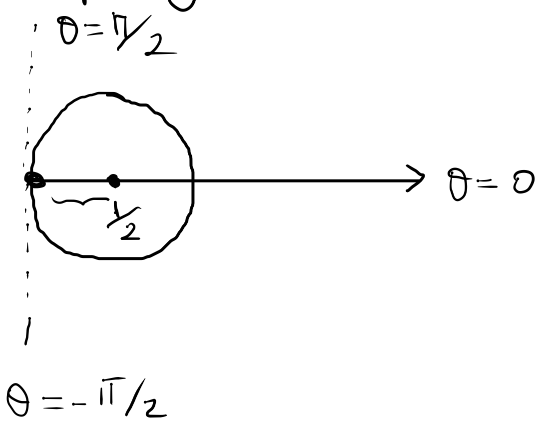
$$=2\int_0^{2\pi}\sin\frac{\theta}{2}\,d\theta$$

$$=2\cdot(-2)\left(\cos\frac{\theta}{2}\right)\Big|_0^{2\pi}$$

$$=-4(\cos\pi-\cos 0)$$

$$=-4(-1-1)=8\text{ br}$$

Ör/ $r=\cos\theta$ çemberinin çevresini hesaplayınız. $r'=-\sin\theta$



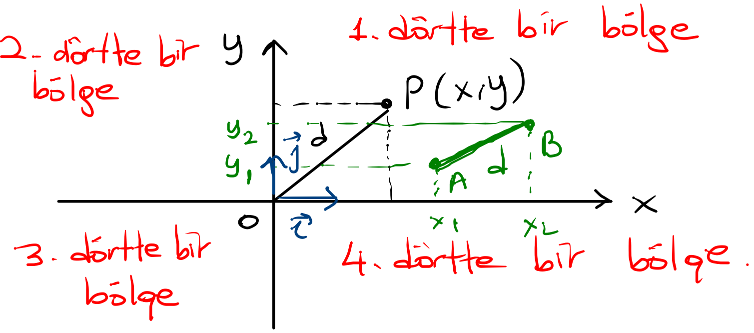
$$S=\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\sqrt{(-\sin\theta)^2+\cos^2\theta}\,d\theta$$

$$=\int_{-\pi/2}^{\pi/2}d\theta=\theta\Big|_{-\pi/2}^{\pi/2}$$

$$=\frac{\pi}{2}-\left(-\frac{\pi}{2}\right)=\pi\text{ br.}$$

VEKTÖRLER

İki boyutlu koordinat sistemi (Düzlem)



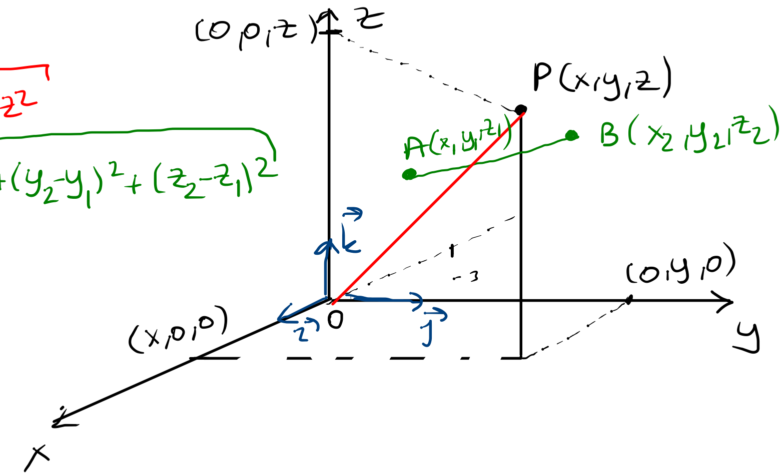
$$d = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

Üç boyutlu koordinat sistemi (3 boyutlu uzay)

$$|OP| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

$$|AB| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$



x-ekseni üzerindeki noktalarda y ve z koordinatları sıfırdır.

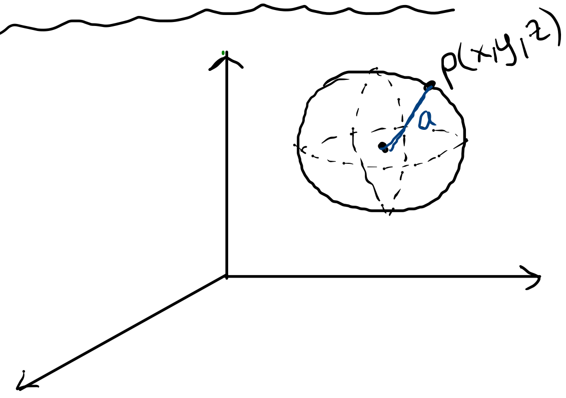
y-ekseni üzerindeki noktalarda x ve z koordinatları sıfırdır.

z-ekseni üzerindeki noktalarda x ve y koordinatları sıfırdır.

xy-düzlemi $z=0$ standart denklemi ile
xz-düzlemi $y=0$ standart denklemi ile
yz-düzlemi $x=0$ standart denklemi ile belirlenir.

$x=0, y=0, z=0$ koordinat düzlemleri uzayı sekizde bir bölge denen sekiz hücreye ayırır.
Koordinatların hepsinin pozitif olduğu sekizde bir bölgeye 1. sekizde bir bölge denir.

Ör/
- $z\geq 0$ 'ın geometrik yorumu; xy-düzleminin üzerinde ve üstünde olan noktaların oluşturduğu üst yarı uzay
- $x=-3$ x-eksenini -3 noktasında dik kesen düzlemdir ve bu düzlem yz-düzlemine paraleldir.



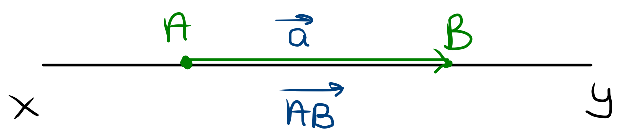
Bir $P(x,y,z)$ noktasının yarıçapı a ve merkezi $P(x_0,y_0,z_0)$ olan bir kürenin tam üzerinde olması için

$|P_0P| = a$ olmalıdır. Yani

$$\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2} = a$$

$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2 = a^2$ denklemi sağlanmalıdır.

Yönlendirilmiş doğru parçasına vektör denir.



$\overrightarrow{AB}$ yönlü doğru parçasının gösterdiği vektör A başlangıç noktasına, B bitiş noktasına ve $|\overrightarrow{AB}|$ ile gösterilen uzunluğa sahiptir.

Eğer iki vektörün yönleri ve uzunlukları aynı ise bu iki vektör eşittir.

$\langle a_1, a_2 \rangle = \vec{a} = a_1\vec{i} + a_2\vec{j}$ (2-boyutlu uzay/düzlem) $\quad \vec{i}$ ve $\vec{j}$ standart baz vektörleri, $|\vec{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2}$

$\langle a_1, a_2, a_3 \rangle = \vec{a} = a_1\vec{i} + a_2\vec{j} + a_3\vec{k}$ (3-boyutlu uzay) $\quad \vec{i}, \vec{j}$ ve $\vec{k}$ standart baz vektörleri, $|\vec{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$

$\langle a_1, a_2, \dots, a_n \rangle = \vec{a} = a_1\vec{e_1} + a_2\vec{e_2} + \dots + a_n\vec{e_n}$ (n-boyutlu uzay) $\quad \vec{e_1}, \vec{e_2}, \dots, \vec{e_n}$ standart baz vektörleri, $|\vec{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2}$

$\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}, \quad \vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}, \quad \vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$ şeklinde de gösterilebilirler.

$$\vec{a} = a_1\vec{i} + a_2\vec{j} + a_3\vec{k} = \langle a_1, a_2, a_3 \rangle = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$$

a_i'ler vektörün bileşenleri.

Tanım: Uzunluğu 1'e eşit olan vektöre birim vektör denir.

Standart baz vektörlerin uzunlukları 1'dir. $\vec{i} \rightarrow$ x-ekseninin pozitif yönündeki bir birim vektördür.

Tanım:

$\vec{a} \neq 0$ ise

1) $\dfrac{\vec{a}}{|\vec{a}|}$, $\vec{a}$ yönündeki bir birim vektördür.

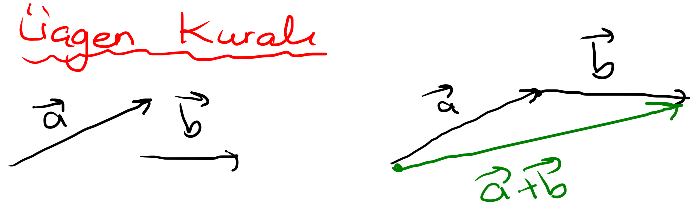
2) $\vec{a} = |\vec{a}| \cdot \dfrac{\vec{a}}{|\vec{a}|}$ denklemi $\vec{a}$ 'yı uzunluk ve yönün çarpımı olarak ifade eder.

Ör/ 6 Newton'luk bir kuvvet $\vec{a} = 2\vec{i} + 2\vec{j} - \vec{k}$ vektörü yönünde uygulanmaktadır. F kuvvetini, büyüklük ve yönün çarpımı olarak ifade ediniz.

$$\vec{F} = 6 \cdot \frac{\vec{a}}{|\vec{a}|} = 6 \cdot \frac{2\vec{i}+2\vec{j}-\vec{k}}{\sqrt{2^2+2^2+(-1)^2}} = \frac{6}{3}\left(2\vec{i}+2\vec{j}-\vec{k}\right) = 4\vec{i}+4\vec{j}-2\vec{k}$$

Vektörlerin Toplamı

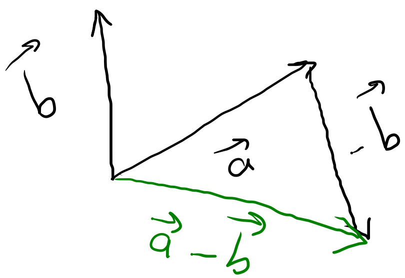
1. Üçgen Kuralı

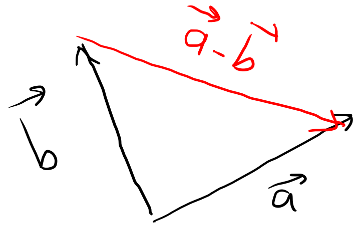


2. Paralel kenar kuralı

Vektörlerin Farkı

$\vec{a} - \vec{b} = \vec{a} + (-\vec{b})$





Ör: $\vec{a} = -\vec{i} + 3\vec{j} + \vec{k}$

$\vec{b} = 4\vec{i} + 7\vec{j}$

$\Rightarrow \vec{a} - \vec{b} = (-1-4)\vec{i} + (3-7)\vec{j} + (1-0)\vec{k} = -5\vec{i} - 4\vec{j} + \vec{k}$

$2\vec{a} + 3\vec{b} = 2(-\vec{i} + 3\vec{j} + k) + 3(4\vec{i} + 7\vec{j}) = (-2\vec{i} + 6\vec{j} + 2\vec{k}) + (12\vec{i} + 21\vec{j})$

$= (-2+12)\vec{i} + (6+21)\vec{j} + (2+0)\vec{k}$

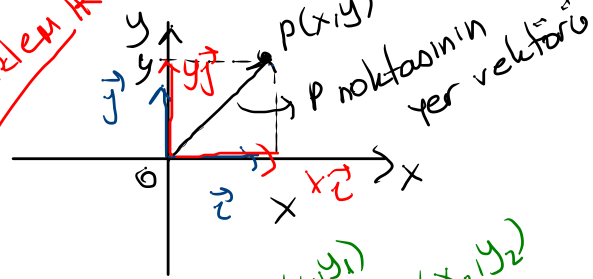
$= 10\vec{i} + 27\vec{j} + 2\vec{k}$

$\vec{a}, \vec{b}$ ve $\vec{c}$ birer vektör α ve β birer skaler olsun.

- $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$
- $\vec{a} + \vec{0} = \vec{a}$
- $\vec{a} . \vec{0} = \vec{0}$
- $(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c})$
- $\vec{a} + (-\vec{a}) = \vec{0}$
- $1 . \vec{a} = \vec{a}$
- $(\alpha\beta) . \vec{a} = \alpha . (\beta\vec{a}) = \beta . (\alpha\vec{a})$
- $(\alpha + \beta)\vec{a} = \alpha\vec{a} + \beta\vec{a}$
- $\alpha(\vec{a} + \vec{b}) = \alpha\vec{a} + \alpha\vec{b}$

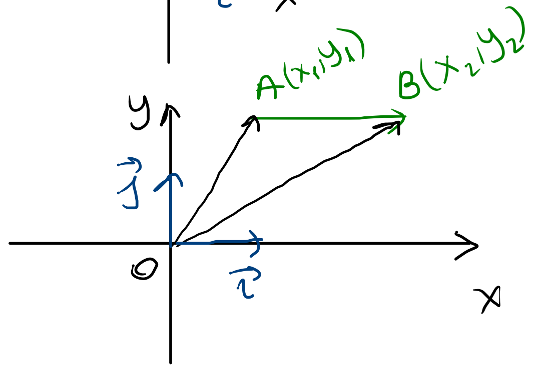
Yer vektörü

Düzlem $\mathbb{R}^2$



$$\vec{OP} = x\vec{i} + y\vec{j}$$

$$|\vec{OP}| = \sqrt{x^2 + y^2}$$



$$\vec{OA} + \vec{AB} = \vec{OB}$$

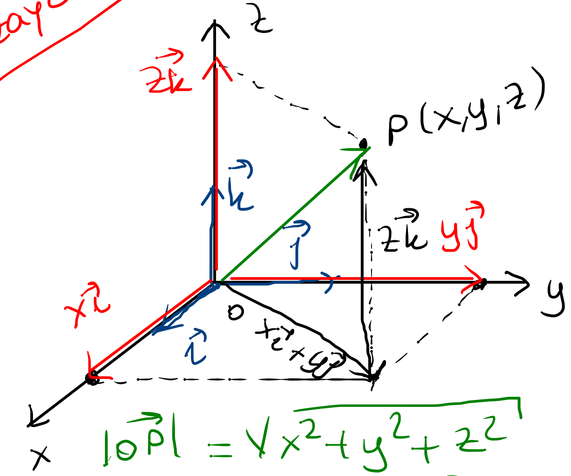
$$\vec{AB} = \vec{OB} - \vec{OA}$$

$$= (x_2\vec{i} + y_2\vec{j}) - (x_1\vec{i} + y_1\vec{j})$$

$$= (x_2 - x_1)\vec{i} + (y_2 - y_1)\vec{j}$$

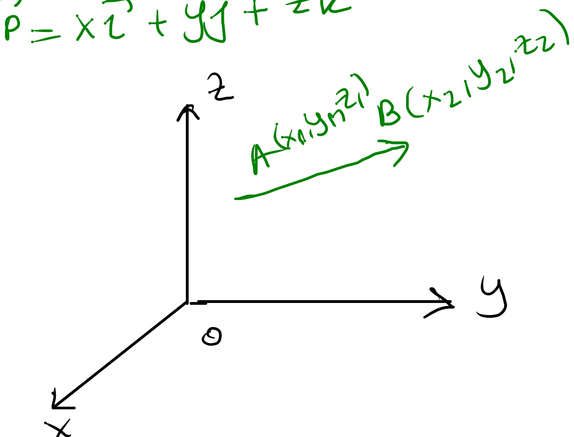
$$|\vec{AB}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

Uzayda $\mathbb{R}^3$



$$|\vec{OP}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

$$\vec{OP} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$$



$$\vec{AB} = (x_2 - x_1)\vec{i} + (y_2 - y_1)\vec{j} + (z_2 - z_1)\vec{k}$$

$$|\vec{AB}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$