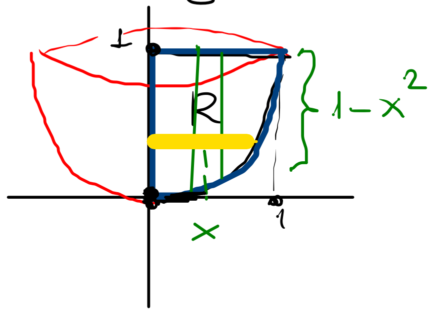
Ör/ Parabolik $y=x^2$, $0\le x\le 1$ yayının y-ekseni etrafında döndürülmesi ile oluşan kasenin hacmini bulunuz. $x=\sqrt{y}$



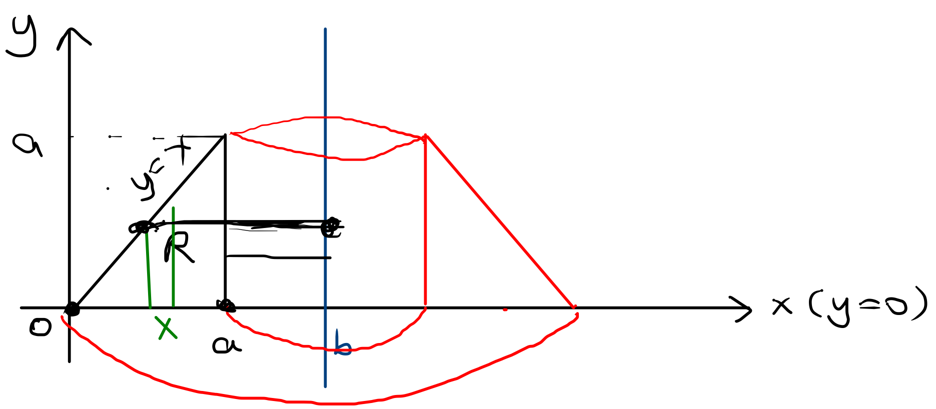
Silindirik kabuk

$$V=2\pi\int_0^1 x\cdot(1-x^2)\,dx$$

Disk Yöntemi

$$V=\pi\int_0^1 (\sqrt{y})^2\,dy$$

Ör/ $y=x$, $y=0$ ve $x=a>0$ ile sınırlı üçgensel bölgenin $x=b>a$ doğrusu etrafında döndürülmesi ile oluşturulan cismin hacmini bulunuz.

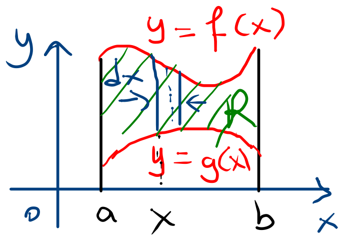
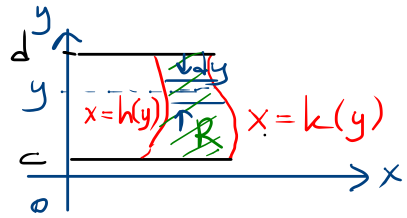


Silindirik kabuk

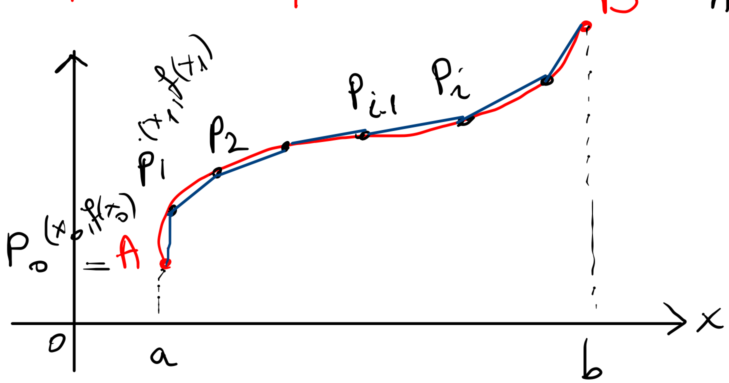
$$V=\int_0^a 2\pi(b-x)\cdot x\,dx$$

Disk yöntemi

$$V=\int_0^a \pi\left[(b-y)^2-(b-a)^2\right]dy$$

R bölgesi / Dönme ekseni		
x-ekseni	Düzlemsel dilimler kullanılarak $V_x = \pi \int_a^b \{[f(x)]^2 - [g(x)]^2\} dx$	Silindirik kabuklar kullanılarak $V_y = \int_c^d 2\pi y [k(y) - h(y)] dy$
y ekseni	Silindirik kabuklar kullanılarak $V_x = 2\pi \int_a^b x \cdot [f(x) - g(x)] dx$	Düzlemsel dilimler kullanılarak $V_y = \int_c^d \pi \{[k(y)]^2 - [h(y)]^2\} dy$

Yay Uzunluğu



A ve B düzlemdeki iki nokta olmak üzere $|AB|$ sembolü A ve B arasındaki uzaklığı gösterecektir. A ve B noktalarını birbirbirine bağlayan bir C eğrisi verilmiş olsun.

Eğri boyunca sırasıyla $A = P_0, P_1, P_2, \dots, P_n = B$ noktalarını seçelim. Bu noktaları birbirine doğru parçaları ile bağlayarak elde edilen $P_0P_1 \dots P_n$ poligonal doğrusu C eğrisi için bir poligonal yaklaşım sağlar ve uzunluğu

$$L_n = |P_0P_1| + |P_1P_2| + \dots + |P_{n-1}P_n| = \sum_{i=1}^{n} |P_{i-1}P_i|$$

olacaktır. İki noktayı birbirine bağlayan en kısa eğri bir doğru parçası olduğuna göre L_n'in uzunluğu C eğrisinin uzunluğunu aşamaz. Eğer mevcut noktaların arasına daha fazla nokta ekleyerek n'i arttırırsak, L_n'in uzunluğu küçülmez, artabilir. Eğer C'nin her poligonal yaklaşımı için $L_n \leq k$ olacak şekilde bir sonlu k sayısı varsa o zaman C eğrisinin A'dan B'ye olan yay uzunluğu bu eşitsizliği sağlayan en küçük reel k sayısıdır.

Bir fonksiyonun grafiğinin yay uzunluğu

f fonksiyonu sonlu ve kapalı $[a,b]$ aralığında tanımlanmış, sürekli ve sürekli f' türevine sahip olsun. Eğer C, $y=f(x)$'in grafiği ise o zaman $[a,b]$ aralığının herhangi bir bölüntüsü C için bir poligonal yaklaşım sağlar.

$a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n = b$ bölüntüsü için $0 \leq i \leq n$ olmak üzere P_i ile $(x_i, f(x_i))$ noktasını gösterelim. O zaman

$$L_n = \sum_{i=1}^{n} |P_{i-1}P_i| = \sum_{i=1}^{n} \sqrt{(x_i - x_{i-1})^2 + [f(x_i) - f(x_{i-1})]^2}$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \sqrt{(x_i - x_{i-1})^2 \left[1 + \left[\frac{f(x_i) - f(x_{i-1})}{x_i - x_{i-1}} \right]^2 \right]}$$

$$\Rightarrow L_n = \sum_{i=1}^{n} \sqrt{1+\left[\frac{f(x_i)-f(x_{i-1})}{x_i - x_{i-1}}\right]^2} \quad \underbrace{(x_i - x_{i-1})}_{\Delta x_i}$$

f fonksiyonu $[a,b]$ aralığında sürekli ve türeve sahip olduğundan $[x_{i-1}, x_i] \subset [a,b]$ aralığında da sürekli ve türeve sahiptir. Dolayısıyla ortalama değer teoremine göre

$$\frac{f(x_i)-f(x_{i-1})}{x_i - x_{i-1}} = f'(c_i)$$ olacak şekilde $c_i \in [x_{i-1}, x_i]$ sayısı vardır. O halde

$$L_n = \sum_{i=1}^{n} \sqrt{1+[f'(c_i)]^2} \cdot \Delta x_i \quad \Rightarrow \lim_{n\to\infty} L_n = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \sqrt{1+[f'(c_i)]^2}\,\Delta x_i = \int_a^b \underbrace{\sqrt{1+[f'(x)]^2}\,dx}_{ds}$$

ds → yay diferansiyeli.

olur. L_n toplamı $\int_a^b \sqrt{1+[f'(x)]^2}\,dx$ için bir Riemann toplamıdır.

$x = g(y)$, $c \le y \le d$ şeklindeki denklemler için

$$s = \int_c^d \sqrt{1+[g'(y)]^2}\,dy$$

şeklinde yay uzunluğu hesaplanır.

Ör/ $y = x^{2/3}$ eğrisinin $x=1$'den $x=8$'e olan uzunluğunu bulunuz.

$D(f) = \mathbb{R}$

$y' = \frac{2}{3} x^{-1/3}$ Türev mevcut

$$S = \int_1^8 \sqrt{1 + [f'(x)]^2}\, dx = \int_1^8 \sqrt{1 + \left(\frac{2}{3} x^{-1/3}\right)^2}\, dx = \int_1^8 \sqrt{1 + \frac{4}{9x^{2/3}}}\, dx$$

$$= \int_1^8 \frac{\sqrt{9x^{2/3}+4}}{3x^{1/3}}\, dx = \int_{13}^{40} \sqrt{u} \cdot \frac{du}{18}$$

$$= \frac{1}{18} \cdot \frac{2}{3} u^{3/2} \Big|_{13}^{40}$$

$$= \frac{1}{27} \left(40\sqrt{40} - 13\sqrt{13}\right) \text{ br}$$

$9x^{2/3} + 4 = u$

$9 \cdot \frac{2}{3} \cdot x^{-1/3} dx = du$

$\frac{18}{3x^{1/3}} dx = du$

$\frac{dx}{3x^{1/3}} = \frac{du}{18}$

$x = 1 \Rightarrow u = 13$

$x = 8 \Rightarrow u = 40$

Ör/ $y = x^4 + \frac{1}{32x^2}$ eğrisinin $x=1$ den $x=2$'ye olan uzunluğunu bulunuz.

$D(f): \mathbb{R} - \{0\}$

$y' = 4x^3 - \frac{1}{16x^3}$ mevcut

$\int \frac{1}{16x^3} = \int \frac{1}{16} x^{-3}$

$= \frac{1}{16} \frac{x^{-2}}{-2}$

$$s = \int_1^2 \sqrt{1 + \left[4x^3 - \frac{1}{16x^3}\right]^2}\, dx$$

$$= \int_1^2 \sqrt{1 + \left[(4x^3)^2 - \cancel{2} \cdot \frac{1}{\cancel{4}_2} + \left(\frac{1}{16x^3}\right)^2\right]}\, dx$$

$$= \int_1^2 \sqrt{(4x^3)^2 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{16x^3}\right)^2}\, dx$$

$$= \int_1^2 \sqrt{\left(4x^3 + \frac{1}{16x^3}\right)^2}\, dx$$

$(1,2)$ aralığı için $4x^3 + \frac{1}{16x^3} > 0$ dır.

$$= \int_1^2 \left[4x^3 + \frac{1}{16x^3}\right] dx = x^4 - \frac{1}{32x^2} \Big|_1^2 = \left(16 - \frac{1}{128}\right) - \left(1 - \frac{1}{\underset{(4)}{32}}\right) = 15 + \frac{3}{128} \text{ br}$$

Ör/ $x=y^2$ $(0,1)$ aralığındaki kısmının uzunluğunu bulunuz.

$D(f): \mathbb{R}$

$\frac{dx}{dy}=2y$ türev mevcut.

$$S=\int_0^1 \sqrt{1+(2y)^2}\,dy=\int_0^1\sqrt{1+4y^2}\,dy=\int_0^{\arctan 2}\sqrt{1+\tan^2 t}\cdot \sec^2 t\,dt$$

$2y=\tan t$

$2dy=\sec^2 t\,dt$

$dy=\frac{1}{2}\sec^2 t\,dt$

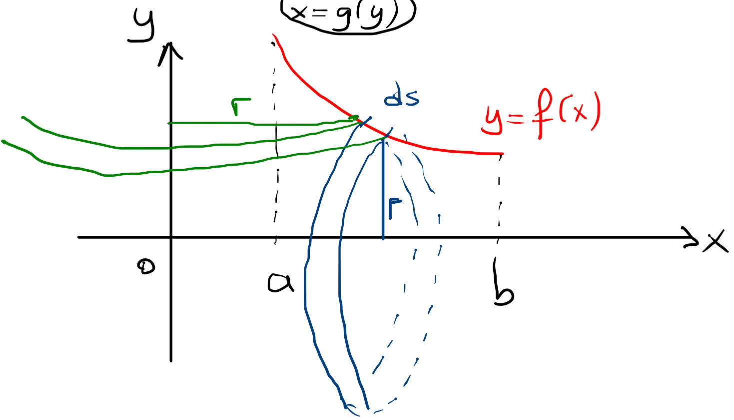
$$=\int_0^{\arctan 2}\sec^3 t\,dt$$

$$=\int_0^{\arctan 2}\underbrace{\sec t}_{u}\cdot\underbrace{\sec^2 t\,dt}_{dv}$$

$y=0 \Rightarrow \tan t=0 \Rightarrow t=0$

$y=1 \Rightarrow \tan t=2 \Rightarrow t=\arctan 2$

Dönel Yüzeylerin Alanları



$$S = \int_a^b \underbrace{2\pi r \, ds}_{dS} = \int_a^b 2\pi |f(x)| \sqrt{1+[f'(x)]^2}\, dx$$

Bir düzlem eğrisi, eğrinin bulunduğu düzlemde olan bir doğru etrafında döndürüldüğünde bir dönel yüzey oluşturur. Örneğin; a yarıçaplı bir küre, a yarıçaplı yarım çemberin kendi çapı etrafında döndürülmesi ile elde edilir.

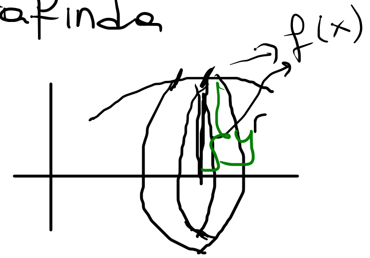
Dönel yüzeyin alanı, eğrinin yay elemanı ds'in verilen doğru etrafında döndürülmesi ile elde edilen alan elemanı dS'i integre ederek bulunabilir. Eğer ds elemanının rotasyon yarıçapı r ise o zaman dönme sonucu bu eleman $2\pi r$ uzunluklu ve ds genişlikli dairesel bir band oluşturur. Bu bandın alanı $dS = 2\pi r\, ds$ olacağından dönel yüzeyin alanı yarıçap a'dan b'ye değiştiğinden

$$S = \int_a^b dS = \int_a^b 2\pi r \, ds =$$

integrali ile hesaplanır.

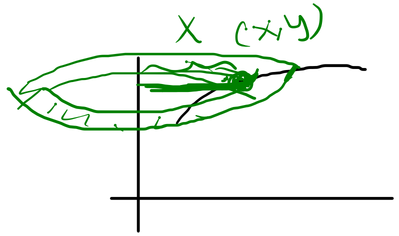
– Eğer $[a,b]$ aralığında $f'(x)$ sürekli ve $y=f(x)$ eğrisi x_ekseni etrafında döndürülürse;

$$S = 2\pi \int_a^b |f(x)| \sqrt{1+[f'(x)]^2}\, dx \qquad (r = |f(x)| = |y|)$$



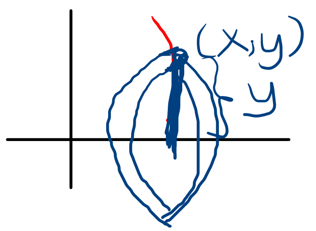
y-ekseni etrafında döndürülürse;

$$S = 2\pi \int_a^b |x| \sqrt{1+[f'(x)]^2}\, dx \qquad (r = |x|)$$



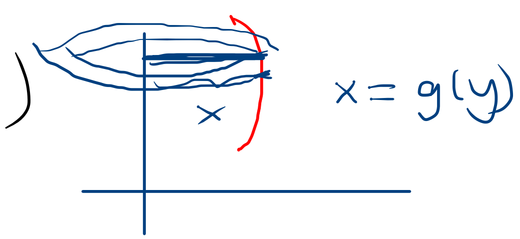
– Eğer $[c,d]$ aralığında $g'(y)$ sürekli ve $x=g(y)$ eğrisi x_ekseni etrafında döndürülürse;

$$S = 2\pi \int_c^d |y| \sqrt{1+[g'(y)]^2}\, dy \qquad (r = |y|)$$



y_ekseni etrafında döndürülürse;

$$S = 2\pi \int_c^d |g(y)| \sqrt{1+[g'(y)]^2}\, dy \qquad (r = |x| = |g(y)|)$$



ÖRNEKLER

1) $y=2\sqrt{x}$ eğrisinin $1\le x\le 2$ için olan kısmının x-ekseni etrafında döndürülmesiyle elde edilen yüzeyin alanını bulunuz.

$D(f):\ x\geq 0$

$y'=\dfrac{1}{\sqrt{x}}$ mevcut

$$S=2\pi\int_1^2 2\sqrt{x}\cdot\sqrt{1+\frac{1}{x}}\,dx=4\pi\int_1^2 \cancel{\sqrt{x}}\cdot\frac{\sqrt{x+1}}{\cancel{\sqrt{x}}}\,dx$$

$$=4\pi\int_1^2\sqrt{x+1}\,dx=4\pi\int_2^3\sqrt{t}\,dt=4\pi\cdot\frac{2}{3}\,t^{3/2}\Big|_2^3$$

$x+1=t$

$dx=dt$

$x=1\Rightarrow t=2$

$x=2\Rightarrow t=3$

$$=\frac{8\pi}{3}\left(3\sqrt{3}-2\sqrt{2}\right)\ br^2$$

2) $x=1-y$, $(0\le y\le 1)$ doğru parçasını y-ekseni etrafında döndürerek koni üretiliyor. Koninin yanal yüzey alanını bulunuz.

$D(f)=\mathbb{R}$

$\dfrac{dx}{dy}=-1$

$$S=2\pi\int_0^1(1-y)\cdot\sqrt{1+(-1)^2}\,dy=2\sqrt{2}\pi\int_0^1(1-y)\,dy$$

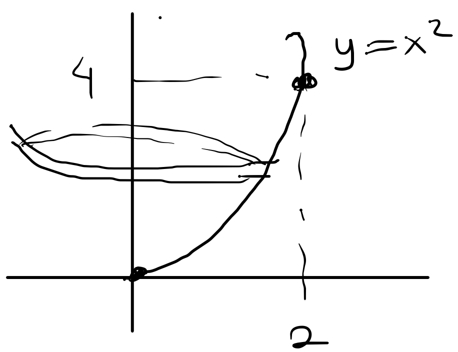
$$=2\sqrt{2}\pi\left(y-\frac{y^2}{2}\Big|_0^1\right)$$

$$=\frac{2\sqrt{2}\pi}{2}=\sqrt{2}\pi\ br^2$$

Ö7/ $y=x^2$ eğri yayının $x=0$'dan $x=2$'ye kadar olan kısmının y-ekseni etrafında döndürülmesiyle oluşan yüzeyin alanını bulunuz.

$1+4x^2=t \Rightarrow 8x\,dx=dt$

$2x\,dx=\frac{dt}{4}$



$$S=\int_0^2 2\pi x\cdot\sqrt{1+4x^2}\,dx=\int_1^{17}\pi\cdot\sqrt{t}\cdot\frac{dt}{4}=\frac{\pi}{4}\cdot\frac{2}{3}t^{3/2}\Big|_1^{17}$$

$$=\frac{\pi}{6}\left(17\sqrt{17}-1\right)$$

$y'=2x$

$$S=\int_0^4 2\pi\sqrt{y}\sqrt{1+\frac{1}{4y}}\,dy$$

$$=\cancel{2}\pi\int_0^4\cancel{\sqrt{y}}\cdot\frac{\sqrt{4y+1}}{\cancel{2}\cancel{\sqrt{y}}}\,dy=\frac{\pi}{4}\int_1^{17}\sqrt{u}\,du$$

$$=$$

$x=\sqrt{y}$

$\frac{dx}{dy}=\frac{1}{2\sqrt{y}}$

$4y+1=u$

$4dy=du$

$dy=\frac{du}{4}$

3) $f(x)=\sqrt{4x-x^2}$ eğri yayının $x=1$'den $x=3$'e kadar kısmının, x-ekseni etrafında döndürülmesiyle elde edilen yüzeyin alanını bulunuz.

$$4x-x^2 \geq 0$$

$$D(f): [0,4]$$

$$f'(x)=\frac{-2x+4}{2\sqrt{4x-x^2}}=\frac{2-x}{\sqrt{4x-x^2}}$$

$[1,3]$'de mevcut.

$$S=\int_1^3 2\pi \cdot \sqrt{4x-x^2} \cdot \sqrt{1+\left(\frac{2-x}{\sqrt{4x-x^2}}\right)^2}\,dx$$

$$=2\pi\int_1^3 \left[\cancel{\sqrt{4x-x^2}} \cdot \frac{\sqrt{4x-x^2+(2-x)^2}}{\cancel{\sqrt{4x-x^2}}}\right]dx$$

$$=2\pi\int_1^3 \sqrt{\cancel{4x}-\cancel{x^2}+4-\cancel{4x}+\cancel{x^2}}\,dx = 4\pi\int_1^3 dx$$

$$=8\pi \text{ br}^2$$

Genelleştirilmiş İntegraller (improper integraller)

Belirli integrallerin $I=\int_a^b f(x)\,dx$ şeklinde f'in kapalı ve sonlu $[a,b]$ aralığında sürekli olduğu integralleri inceledik. $f(x)$ sınırlı olduğundan I integrali de sonlu bir sayı olarak elde edildi. Bu integralde mevcut olmayan iki olasılığı gözönüne alarak integrali genelleştireceğiz.

olasılıklar
- 1°) $a=-\infty$ veya $b=\infty$ veya her ikisi de söz konusu ise
- 2°) $x=a$'ya veya $x=b$'ye veyahut her ikisine ya da $x=c\in[a,b]$'ye yaklaşırken f sınırsız ise

1°) durumda olanlara I. tip improper integraller
2°) durumda olanlara II. tip improper integraller denir.

Bu integrallerin sonucu sonlu (yakınsak) veya sonsuz (ıraksak) olabilir.

I. tip improper integraller.

- Eğer f, $[a,\infty)$ aralığında sürekli ise o zaman $[a,\infty)$ aralığında $f(x)$'in integrali

$$\int_a^{\infty} f(x)\,dx = \lim_{b\to\infty}\left[\int_a^b f(x)\,dx\right]$$

şeklinde hesaplanır.

- Eğer f, $(-\infty,b]$ aralığında sürekli ise o zaman $(-\infty,b]$ aralığında $f(x)$'in integrali

$$\int_{-\infty}^{b} f(x)\,dx = \lim_{a\to-\infty}\left[\int_a^b f(x)\,dx\right]$$

şeklinde hesaplanır.

- Eğer f, $(-\infty,\infty)$ aralığında sürekli ise o zaman $(-\infty,\infty)$ aralığında $f(x)$'in integrali

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = \int_{-\infty}^{0} f(x)\,dx + \int_0^{\infty} f(x)\,dx = \lim_{a\to-\infty}\left[\int_a^0 f(x)\,dx\right] + \lim_{b\to\infty}\left[\int_0^b f(x)\,dx\right]$$

şeklinde hesaplanır.

Örnekler

1) $\int_{1}^{\infty} \frac{dx}{x^2} =$

2) $y=\frac{1}{x}$ eğrisi altında, $y=0$ üzerinde ve $x=1$ doğrusunun sağında olan bölgenin alanını bulunuz

3) $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{1+x^2} =$

4) $\int_0^{\infty} \cos x \, dx =$

II. tip İmproper İntegraller

- Eğer f, (a,b] aralığında sürekli ve a'nın yakın civarında sınırsız ise o zaman (a,b] aralığında f'in integralini

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{c \to a^+} \left(\int_c^b f(x)\,dx \right)$$

şeklinde hesaplarız.

- Eğer f, [a,b) aralığında sürekli ve b'nin yakın civarında sınırsız ise o zaman [a,b) aralığında f'in integralini

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{d \to b^-} \left(\int_a^d f(x)\,dx \right)$$

şeklinde hesaplarız.

- Eğer f, (a,b) aralığında sürekli ve hem a'nın hem de b'nin yakın civarında sınırsız ise o zaman (a,b) aralığında f'in integrali

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^e f(x)\,dx + \int_e^b f(x)\,dx \qquad (e \in (a,b))$$

$$= \lim_{c \to a^+} \int_c^e f(x)\,dx + \lim_{d \to b^-} \int_e^d f(x)\,dx$$

şeklinde hesaplanır.

- Eğer f, $[a,b]$ aralığının bir c noktası dışında aralıkta sürekli ise o zaman $[a,b]$ aralığında f'in integrali

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx = \lim_{\varepsilon \to c^-} \left(\int_a^{\varepsilon} f(x)\,dx \right) + \lim_{\varepsilon \to c^+} \left(\int_{\varepsilon}^b f(x)\,dx \right)$$

şeklinde hesaplanır.

Ör/ $y = \frac{1}{\sqrt{x}}$ in altında, x-ekseninin üzerinde kalan $x=0$ ve $x=1$ ile sınırlı bölgenin alanını bulunuz.