Sabit katsayılı homojen olmayan (ikinci taraflı) Lineer diferansiyel denklemler

$a_0, a_1, \ldots, a_n$ reel sabitler, $n>0$ tamsayı ve $a_0 \neq 0$ olmak üzere

$$a_0 y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1} y' + a_n y = f(x) \quad (1) \qquad (f(x) \rightarrow \text{sürekli fonk})$$

şeklindeki denklemlerdir.

Böyle bir dif. denklemin genel çözümünün, ikinci tarafsız denklemin genel çözümü ile ikinci taraflı denklemin $f(x)$ fonksiyonuna bağlı bulunacak olan çözümünün toplamı olduğunu daha önce ifade etmiştik.

Burada $f(x)$e bağlı çözümü bulmak için yöntem verilecektir.

Belirsiz katsayılar yöntemi

(1) denklemi için belirsiz katsayılar yöntemi, denklemin $f(x)$ fonksiyonuna benzeyen bir biçime sahip olan ve bilinmeyen bazı katsayıları içeren bir özel çözümünü tahmin etmek ve bunun içerdiği bilinmeyen katsayıları denklem sağlanacak şekilde belirlemektir.

1°) $f(x)$ polinom şeklinde ise;

$f(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_{n-1}x + a_n$ şeklinde n. dereceden bir polinom olsun.

a) Eğer karakteristik denklemin kökleri sıfırdan farklı ise;

O zaman $y_ö = f(x)$ ile aynı dereceden bir polinom olarak önerilir.

$$\boxed{y_ö = b_0 x^n + b_1 x^{n-1} + \dots + b_{n-1}x + b_n}$$

Eğer bu bir çözüm ise dif. denklemi sağlamalıdır. Bu nedenle gerekli türevler alınarak herbir türev ve $y_ö$ denklemde yerine yazılmak suretiyle polinom özdeşliğinden yararlanılarak önerilen $y_ö$ fonksiyonunun bilinmeyen katsayıları bulunarak istenen özel çözüm elde edilir.

Ör/ $y'' - y = \underline{\underline{2x^2}}$ dif. denk.'nin genel çöz. bul.

k.D: $L(r) = r^2 - 1 = 0 \Rightarrow \underline{\underline{r_{1,2} = \mp 1}} \Rightarrow \boxed{y_h = c_1 e^{-x} + c_2 e^{x}}$

ikinci tarafsız denk. ÇÖ.

$(D^2 - 1)y = 2x^2$

$y_ö = ax^2+bx+c$ şeklinde önerilir.

$y'_ö = 2ax+b$

$y''_ö = 2a$

$\Rightarrow$ $y''-y=2x^2$

$\Rightarrow 2a-(ax^2+bx+c) \equiv 2x^2$

$\Rightarrow -ax^2-bx+(2a-c) \equiv 2x^2$

$\Rightarrow -a=2 \Rightarrow a=-2$

$-b=0 \Rightarrow b=0$

$2a-c=0 \Rightarrow c=-4$

$\Rightarrow \boxed{y_ö = -2x^2-4}$ ikinci taraflı denkin özel çözümü

istenen genel çözüm

$y_{G.Ç} = y_h + y_ö$

$$\boxed{y_{G.Ç} = C_1e^{-x}+C_2e^{x}-2x^2-4}$$

istenen genel çözüm.

b) Eğer 'sıfır' karakteristik denklemin p katlı kökü ise;

O zaman $y_{ö} = x^{p}.$ ($f(x)$ ile aynı dereceden bir polinom) olarak önerilir.

$$\boxed{y_{ö} = x^{p}\left(b_0x^{n} + b_1x^{n-1} + \cdots + b_{n-1}x + b_n\right)}$$

Bir çözüm olduğu düşünüldüğünden yine gerekli türevler alınır dif. denklemde yerine yazılır ve polinom özdeşliğinden bilinmeyen katsayılar bulunur.

Ör/ $D^3(D-1)(D+2)y = x+1$

$K.D: L(r) = r^3(r-1)(r+2) = 0$

$r_{1,2,3} = 0 \quad r_4 = 1 \quad r_5 = -2$

$$\boxed{y_h = c_1 + c_2x + c_3x^2 + c_4e^{x} + c_5e^{-2x}}$$

$y_{ö} = x^3(ax+b) = ax^4 + bx^3$

$D^3(D-1)(D+2)y = x+1$

$D^3(D^2+D-2)y = x+1$

$(D^5 + D^4 - 2D^3)y = x+1$

$y_{ö}' = 4ax^3 + 3bx^2$

$y_{ö}'' = 12ax^2 + 6bx$

$y_{ö}''' = 24ax + 6b$

$y_{ö}^{(4)} = 24a$

$y_{ö}^{(5)} = 0$

$$\Rightarrow \quad 24a - 2(24ax + 6b) \equiv x + 1$$

$$\Rightarrow \quad -48ax + (24a - 12b) \equiv x + 1$$

$$\left.\begin{array}{l} \Rightarrow \quad -48a = 1 \Rightarrow a = -1/48 \\ \quad 24a - 12b = 1 \Rightarrow b = -1/8 \end{array}\right\} \Rightarrow \boxed{y_ö = -\frac{x^4}{48} - \frac{x^3}{8}} \Rightarrow y_{G.Ç} = y_h + y_ö$$

$$\Rightarrow \boxed{y_{G.Ç} = c_1 + c_2 x + c_3 x^2 + c_4 e^{x} + c_5 e^{-2x} - \frac{x^4}{48} - \frac{x^3}{8}}$$

2°) $f(x) = M.e^{\alpha x}$ şeklinde ise; (M: sbt)

a) Eğer α karakteristik denklemin kökü değilse;

O zaman $y_ö = A.e^{\alpha x}$ şeklinde A: sbt olmak üzere önerilir. Bu fonksiyonun çözüm olduğu düşünüldüğünden gerekli türevler alınarak denklemde yerine yazılır ve karşılıklı olarak eşitlikten A katsayısı belirlenir.

Ör/ $y'' - 4y' + 3y = 4e^{2x}$ dif. denk.'nin genel çöz. bulunuz.

$$(D^2 - 4D + 3)y = 4e^{2x} \qquad \boxed{\alpha = 2} \neq r_1, \neq r_2$$

K.D: $L(r) = r^2 - 4r + 3 = 0$

$$(r-3)(r-1) = 0$$

$$r_1 = 3 \quad r_2 = 1$$

$$\boxed{y_h = c_1 e^{3x} + c_2 e^{x}}$$

$$\left.\begin{aligned} y_ö &= A.e^{2x} \\ y_ö' &= 2Ae^{2x} \\ y_ö'' &= 4Ae^{2x} \end{aligned}\right\} \Rightarrow 4Ae^{2x} - 4.2Ae^{2x} + 3Ae^{2x} = 4e^{2x}$$

$$-Ae^{2x} = 4e^{2x}$$

$$\Rightarrow A = -4$$

$$\Rightarrow \boxed{y_ö = -4e^{2x}}$$

$$y_{G.Ç} = y_h + y_ö$$

$$\boxed{y_{G.Ç} = c_1 e^{3x} + c_2 e^{x} - 4e^{2x}}$$

b) Eğer α karakteristik denklemin p katlı kökü ise;

O zaman $y_ö = A.x^p.e^{\alpha x}$ şeklinde önerilir. Gerekli türevler alınarak denklemde yerine yazılır ve karşılıklı katsayılar eşitlenerek A katsayısı bulunur.

Ör/ $4y''+4y'+y=3.e^{-\frac{x}{2}}$ dif. denk.'nin genel çözümünü bulunuz.

$(4D^2+4D+1)y=3.e^{-\frac{x}{2}}$ $\quad \boxed{\alpha=-\frac{1}{2}}$

K.D: $L(r)=4r^2+4r+1=0$ $\quad =r_1 \quad =r_2$

$(2r+1)^2=0$

$r_{1,2}=-\frac{1}{2}$

$$\boxed{y_h=(c_1+c_2x).e^{-\frac{x}{2}}}$$

$y_ö=x^2.A.e^{-\frac{x}{2}}$

$y_ö'=2xAe^{-\frac{x}{2}}-\frac{x^2}{2}Ae^{-\frac{x}{2}}$

$y_ö''=2Ae^{-\frac{x}{2}}-xAe^{-\frac{x}{2}}-xAe^{-\frac{x}{2}}+\frac{x^2}{4}Ae^{-\frac{x}{2}}$

$=2Ae^{-\frac{x}{2}}-2xAe^{-\frac{x}{2}}+\frac{x^2}{4}Ae^{-\frac{x}{2}}$

$\Rightarrow 4\left[2Ae^{-\frac{x}{2}}-2xAe^{-\frac{x}{2}}+\frac{x^2}{4}Ae^{-\frac{x}{2}}\right]+4\left[2xAe^{-\frac{x}{2}}-\frac{x^2}{2}Ae^{-\frac{x}{2}}\right]+x^2Ae^{-\frac{x}{2}}=3e^{-\frac{x}{2}}$

$8Ae^{-\frac{x}{2}}-\cancel{8xAe^{-\frac{x}{2}}}+\cancel{x^2Ae^{-\frac{x}{2}}}+\cancel{8xAe^{-\frac{x}{2}}}-\cancel{2x^2Ae^{-\frac{x}{2}}}+\cancel{x^2Ae^{-\frac{x}{2}}}=3e^{-\frac{x}{2}} \Rightarrow 8A=3 \Rightarrow A=\frac{3}{8}$

$$\Rightarrow \boxed{y_ö = \frac{3x^2}{8} e^{-\frac{x}{2}}} \Rightarrow \boxed{y_{G.Ç} = y_h + y_ö = (c_1 + c_2 x) e^{-\frac{x}{2}} + \frac{3x^2}{8} e^{-\frac{x}{2}}}$$

3°) $f(x) = M \sin\lambda x + N \cos\lambda x$ şeklinde ise;

a) Eğer '$\mp\lambda i$' karakteristik denklemin kökü değilse;

O zaman $y_ö = A\sin\lambda x + B\cos\lambda x$ şeklinde önerilir. Gerekli türevler alınarak denklemde yerine yazılır ve karşılıklı katsayılar eşitlenir.

Ör/ $y'' - 5y' + 6y = 2\cos x$ dif. denk'nin genel çözümünü bulunuz.

$(D^2 - 5D + 6)y = 2\cos x$

$$\boxed{\begin{array}{l} \lambda = 1 \\ r_{1,2} \neq \mp i \end{array}}$$

K.D: $L(r) = r^2 - 5r + 6 = 0$

$(r-3)(r-2) = 0$

$r_1 = 3, r_2 = 2 \Rightarrow \boxed{y_h = c_1 e^{3x} + c_2 e^{2x}}$

$y_ö = A\sin x + B\cos x$

$y_ö' = A\cos x - B\sin x$

$y_ö'' = -A\sin x - B\cos x$

$$\Rightarrow (-A\sin x - B\cos x) - 5\left[A\cos x - B\sin x\right] + 6\left[A\sin x + B\cos x\right] = 2\cos x$$

$$(5A+5B)\sin x + (5B-5A)\cos x = 2\cos x$$

$$\Rightarrow \begin{array}{l} 5A+5B=0 \\ 5B-5A=2 \end{array}$$

$$B = 1/5 \Rightarrow A = -1/5 \Rightarrow \boxed{y_{ö} = \frac{1}{5}(\cos x - \sin x)}$$

$$\Rightarrow \boxed{y_{G.Ç} = y_h + y_{ö} = c_1 e^{3x} + c_2 e^{2x} + \frac{1}{5}(\cos x - \sin x)}$$

b) Eğer $\mp \lambda i$ karakteristik denklemin p katlı kökü ise;

O zaman $y_{ö} = x^p (A\cos\lambda x + B\sin\lambda x)$ şeklinde önerilir. Gerekli türevler alınarak denklemde yerine yazılır ve karşılıklı katsayılar eşitlenir.

Ör/ $y'' + 4y = \sin 2x$ dif. denk 'nin genel çözümünü bulunuz.

$(D^2+4)y = \sin 2x$

$\lambda = 2$

$\mp 2i$

KD: $L(r) = r^2 + 4 = 0 \Rightarrow r_{1,2} = \mp 2i$

$$\boxed{y_h = c_1 \cos 2x + c_2 \sin 2x}$$

$y_{ö} = x.(A\cos 2x + B\sin 2x)$

$y'_{ö} = A\cos 2x + B\sin 2x + x(-2A\sin 2x + 2B\cos 2x)$

$y''_{ö} = 2.(-2A\sin 2x + 2B\cos 2x) + x(-4A\cos 2x - 4B\sin 2x)$

$= 4(-A\sin 2x + B\cos 2x) - 4x(A\cos 2x + B\sin 2x)$

$\Rightarrow 4(-A\sin 2x + B\cos 2x) \cancel{- 4x(A\cos 2x + B\sin 2x)} \cancel{+ 4x(A\cos 2x + B\sin 2x)} = \sin 2x$

$-4A\sin 2x + 4B\cos 2x = \sin 2x$

$\left.\begin{array}{l} \Rightarrow -4A = 1 \Rightarrow A = -1/4 \\ 4B = 0 \Rightarrow B = 0 \end{array}\right\}$ $\boxed{y_{ö} = \dfrac{-x}{4}\cos 2x}$ $\Rightarrow y_{G.Ç} = y_h + y_{ö}$

$\Rightarrow \boxed{y_{G.Ç} = c_1 \cos 2x + c_2 \sin 2x - \frac{x}{4}\cos 2x}$

$f(x)$	karakteristik denklemin kökü değilse	$y_ö$
1°) $a_0x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_{n-1}x + a_n$ ✓	0	$b_0x^n + b_1x^{n-1} + \dots + b_{n-1}x + b_n$
2°) $M.e^{\alpha x}$ ✓	α	$A.e^{\alpha x}$
3°) $M\cos\lambda x + N\sin\lambda x$ $M\cos\lambda x$ $N\cos\lambda x$ ✓	$\mp\lambda i$	$A\cos\lambda x + B\sin\lambda x$
4°) $\underbrace{P(x)}_{\text{n.der.polinom}} e^{\alpha x}$ ✓	α	$(\text{n.der. polinom}).e^{\alpha x}$
5°) $e^{\alpha x}.\sin\beta x$ ✓ $e^{\alpha x}.\cos\beta x$ $e^{\alpha x}(M\cos\beta x + N\sin\beta x)$	$\alpha\mp i\beta$	$e^{\alpha x}[A\cos\beta x + B\sin\beta x]$

$f(x)$	karakteristik denklemin kökü değilse	$y_ö$
6°) $\underbrace{P(x)}_{\to m.\,der.}.\sin\lambda x + \underbrace{Q(x)}_{\to n.\,der.}.\cos\lambda x$	$\mp \lambda i$	$P(x)$ m. dereceden polinom, $Q(x)$ n. dereceden polinom olmak üzere cos ve sin'ün katsayı polinomları derecesi büyük olanın derecesi ile aynı olarak seçilir (örneğin $m>n$ ise) $(A_0x^m+A_1x^{m-1}+\dots+A_{m-1}x+A_m)\cos\lambda x+(B_0x^m+B_1x^{m-1}+\dots+B_{m-1}x+B_m)\sin\lambda x$
7°) $P(x).e^{\alpha x}.\sin\beta x$ $P(x).e^{\alpha x}.\cos\beta x$ $P(x)$ ↓ n. der. pol.	$\alpha \mp i\beta$	$\{(A_0x^n+A_1x^{n-1}+\dots+A_{n-1}x+A_n)\cos\beta x+(B_0x^n+B_1x^{n-1}+\dots+B_{n-1}x+B_n)\sin\beta x\}e^{\alpha x}$
		NOT: EĞER BU KÖKLER KARAKTERİSTİK DENKLEMİN p KATLI KÖKÜ İSELER BELİRLENECEK OLAN $y_ö$ x^p ile ÇARPILARAK ÖNERİLİR

ÖRNEKLER:

1) $y''-y'-2y=x.e^{-2x}$

$(D^2-D-2)y=x.e^{-2x}$ $\boxed{\alpha=-2}$ $\neq r_1$ $\neq r_2$

K.D: $r^2-r-2=0$

$(r-2)(r+1)=0$

$r_1=2 \quad r_2=-1$

$$\boxed{y_h=c_1e^{2x}+c_2e^{-x}}$$

$$\boxed{y_{G.Ç}=y_h+y_ö=c_1e^{2x}+c_2e^{-x}+\left(\frac{x}{4}+\frac{5}{16}\right)e^{-2x}}$$

$y_ö=(ax+b).e^{-2x}$

$y_ö'=ae^{-2x}-2(ax+b)e^{-2x}$

$y_ö''=-2ae^{-2x}-2ae^{-2x}+4(ax+b)e^{-2x}$

$=-4ae^{-2x}+4(ax+b)e^{-2x}$

$\Rightarrow -4ae^{-2x}+4(ax+b)e^{-2x}-\left[ae^{-2x}-2(ax+b)e^{-2x}\right]$

$-2\left[(ax+b)e^{-2x}\right]\equiv xe^{-2x}$

$\Rightarrow e^{-2x}\left[4ax+(-5a+4b)\right]\equiv xe^{-2x}$

$4ax+(-5a+4b)\equiv x$

$\Rightarrow 4a=1 \Rightarrow a=1/4$

$-5a+4b=0 \Rightarrow b=\frac{5}{16}$

$$\boxed{y_ö=\left(\frac{x}{4}+\frac{5}{16}\right)e^{-2x}}$$

2) $4y'' - y' - 3y = 7xe^x$ dif. denk.inin genel çöz. bulunuz.

$(4D^2 - D - 3)y = 7xe^x$

$\boxed{\begin{aligned}\alpha &= 1\\ &= r_2\end{aligned}}$

k.D: $L(r) = 4r^2 - r - 3 = 0$

$(4r+3)(r-1) = 0$

$r_1 = \frac{-3}{4} \quad r_2 = 1$

$$\boxed{y_h = c_1 e^{-\frac{3x}{4}} + c_2 e^x}$$

$y_ö = x.(ax+b).e^x = (ax^2+bx)e^x$

$y'_ö = (2ax+b)e^x + (ax^2+bx)e^x$

$= [ax^2 + (2a+b)x + b]e^x$

$y''_ö = [2ax + (2a+b)]e^x + [ax^2 + (2a+b)x + b]e^x$

$= [ax^2 + (4a+b)x + (2a+2b)]e^x$

$\Rightarrow 4.[ax^2 + (4a+b)x + (2a+2b)]e^x - [ax^2 + (2a+b)x + b]e^x - 3(ax^2+bx)e^x = 7xe^x$

$\Rightarrow [(4\cancel{a}x^2 - a\cancel{x^2} - 3\cancel{a}x^2) + (16a + \cancel{4b} - 2a - \cancel{b} - \cancel{3b})x + (8a + 8b - b)]e^x = 7xe^x$

$[14ax + (8a+7b)]e^x = 7xe^x$

$$14ax + (8a+7b) \equiv 7x \Rightarrow \quad 14a = 7 \;, \quad 8a+7b=0$$

$$a = \frac{1}{2} \Rightarrow \quad b = -\frac{4}{7} \Rightarrow \quad \boxed{y_{ö} = \left(\frac{x^2}{2} - \frac{4x}{7}\right)e^x}$$

$$\boxed{y_{G.c} = y_h + y_ö = c_1 e^{-\frac{3x}{4}} + c_2 e^x + \left(\frac{x^2}{2} - \frac{4x}{7}\right)e^x}$$

3°) $4y'' - y' - 3y = 5e^{-x}\cos x$ dif. denkleminin bir özel çözümünü bulunuz.

$\alpha = -1 \quad \beta = 1$

K.D: $L(r) = 4r^2 - r - 3 = 0$

$r_1 = -\frac{3}{4} \quad r_2 = 1$

$-1 \mp i \neq r_1$

$\neq r_2$

$$y_ö = e^{-x}(A\cos x + B\sin x)$$

$$y_ö' = -e^{-x}(A\cos x + B\sin x) + e^{-x}(-A\sin x + B\cos x)$$

$$y_ö'' = e^{-x}(A\cos x + B\sin x) - 2e^{-x}(-A\sin x + B\cos x)$$

$$+ e^{-x}(-A\cos x - B\sin x)$$

$$4\left[e^{-x}(A\cos x+B\sin x)-2e^{-x}(-A\sin x+B\cos x)+e^{-x}(-A\cos x-B\sin x)\right]$$

$$-\left[-e^{-x}(A\cos x+B\sin x)+e^{-x}(-A\sin x+B\cos x)\right]-3e^{-x}(A\cos x+B\sin x)\equiv 5e^{-x}\cos x$$

$$e^{-x}\left[(\cancel{4A}-8B-\cancel{4A}+A-B-3A)\cos x+(\cancel{4B}+8A-\cancel{4B}+B+A-3B)\sin x\right]\equiv 5e^{-x}\cos x$$

$$e^{-x}\left[(-9B-2A)\cos x+(9A-2B)\sin x\right]\equiv 5e^{-x}\cos x$$

$$\Rightarrow \begin{array}{l} 9/\ -9B-2A=5 \\ 2/\ 9A-2B=0 \end{array}$$

$$B=\frac{-45}{85}=-\frac{9}{17}\Rightarrow A=\frac{-2}{17}$$

$$\boxed{y_{\ddot{o}}=\frac{-e^{-x}}{17}(2\cos x+9\sin x)}$$

4°) $y''+3y'+2y=x\sin x+\cos x$ dif. denkleminin genel çöz-bulunuz.

$$(D^2+3D+2)y=\overset{1.\text{der.}}{x\sin x}+\overset{0.\text{der.}}{\cos x} \qquad \lambda=1 \quad r_1\neq\mp i \quad r_2\neq\mp i$$

$$\text{K.D: } L(r)=r^2+3r+2=0\Rightarrow(r+2)(r+1)=0\Rightarrow r_1=-2,\ r_2=-1\Rightarrow \boxed{y_h=c_1e^{-2x}+c_2e^{-x}}$$

$$y_{\hat{o}} = (ax+b)\sin x + (cx+d)\cos x$$

$$y'_{\hat{o}} = a\sin x + (ax+b)\cos x + c\cos x - (cx+d)\sin x$$

$$= (ax+b+c)\cos x + (a-cx-d)\sin x$$

$$y''_{\hat{o}} = a\cos x - (ax+b+c)\sin x - c\sin x + (a-cx-d)\cos x$$

$$= (2a-cx-d)\cos x + (2c-ax-b)\sin x$$

$$\Rightarrow (2a-cx-d)\cos x + (2c-ax-b)\sin x + 3\left[(ax+b+c)\cos x + (a-cx-d)\sin x\right]$$

$$+ 2\left[(ax+b)\sin x + (cx+d)\cos x\right] \equiv x\sin x + \cos x$$

$$\Rightarrow \left[2a-cx-d+3ax+3b+3c+2cx+2d\right]\cos x + \left[2c-ax-b+3a-3cx-3d+2ax+2b\right]\sin x$$

$$\equiv x\sin x + \cos x$$

$$\Rightarrow \left[(3a+c)x + (2a+3b+3c+d)\right]\cos x + \left[(a-3c)x + (3a+b+2c-3d)\right]\sin x \equiv x\sin x + \cos x$$

$$\Rightarrow (3a+c)x+(2a+3b+3c+d) \equiv 1 \quad , \quad (a-3c)x+(3a+b+2c-3d) \equiv x$$

$$\begin{aligned} 3a+c&=0 \\ a-3c&=1 \end{aligned}$$

$$10a = 1$$

$$a = 1/10$$

$$c = -3/10$$

$$\begin{aligned} 2a+3b+3c+d &= 1 \\ 3a+b+2c-3d &= 0 \end{aligned}$$

$$\left.\begin{aligned} 3b+d &= 1-\frac{2}{10}+\frac{9}{10} \\ b-3d &= -\frac{3}{10}+\frac{6}{10} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{aligned} 3/ \quad 3b+d &= \frac{17}{10} \\ b-3d &= \frac{3}{10} \end{aligned}$$

$$10b = \frac{27}{5} \Rightarrow b = \frac{27}{50}$$

$$\Rightarrow d = \frac{4}{50}$$

$$\frac{3}{10} - \frac{27}{50}$$

(5)

$$-\frac{12}{50}\cdot\left(-\frac{1}{3}\right)$$

$$\Rightarrow \boxed{y_{\ddot{o}} = \left(\frac{x}{10}+\frac{27}{50}\right)\sin x + \left(\frac{-3x}{10}+\frac{4}{50}\right)\cos x}$$

$$\boxed{y_{G.Ç} = y_h + y_{\ddot{o}} = c_1 e^{-2x} + c_2 e^{-x} + \left(\frac{x}{10}+\frac{27}{50}\right)\sin x + \left(\frac{-3x}{10}+\frac{4}{50}\right)\cos x}$$

Ör/ $y''-y=xe^x\sin x$ dif. denk'nin genel çözümünü bulunuz.

$$(D^2-1)y=xe^x\sin x \qquad \alpha=1 \quad \beta=1$$

$$K.D:\ L(r)=r^2-1=0 \qquad 1\mp i \neq r_1$$

$$\neq r_2$$

$$r^2=1$$

$$r=\mp 1$$

$$\boxed{y_h=c_1e^{-x}+c_2e^x}$$

$$y_ö=[(ax+b)\cos x+(cx+d)\sin x].e^x$$

$$y'_ö=[(ax+b)\cos x+(cx+d)\sin x]e^x$$

$$+e^x[a\cos x-(ax+b)\sin x+c\sin x+(cx+d)\cos x]$$

$$\Rightarrow y'_ö=e^x[(ax+b+a+cx+d)\cos x+(cx+d-ax-b+c)\sin x]$$

$$y''_ö=e^x[(ax+cx+a+b+d)\cos x+(cx-ax+d-b+c)\sin x]$$

$$+e^x[(a+c)\cos x-(ax+b+a+cx+d)\sin x+(c-a)\sin x+(cx+d-ax-b+c)\cos x]$$

$$=e^x[(\cancel{ax}+\cancel{cx}+\underline{a}+\cancel{b}+d+\underline{a}+c+\cancel{cx}+d-\cancel{ax}-\cancel{b}+c)\cos x+(\cancel{cx}-ax\cancel{+d}-b+c-ax-b-a-\cancel{cx}-\cancel{d}$$

$$+c-a)\sin x]$$

$$= e^x\left[(2cx+2a+2c+2d)\cos x + (-2ax-2a-2b+2c)\sin x\right]$$

$$\Rightarrow y''-y = xe^x\sin x$$

$$\Rightarrow e^x\left[(2cx+2a+2c+2d)\cos x + (-2ax-2a-2b+2c)\sin x\right] - e^x\left[(ax+b)\cos x + (cx+d)\sin x\right] \equiv xe^x\sin x$$

$$\Rightarrow \left[(2c-a)x+2a-b+2c+2d\right]\cos x + \left[(-2a-c)x-2a-2b+2c-d\right]\sin x \equiv x\sin x$$

$$\Rightarrow (-2a+c)x+(-2a-2b+2c-d) \equiv x \quad , \quad (2c-a)x+(2a-b+2c+2d)\equiv 0$$

$$\begin{aligned} 2/\; -2a-c &= 1 \\ 2c-a &= 0 \\ \hline -5a &= 2 \\ a = -\tfrac{2}{5} &\Rightarrow c = -\tfrac{1}{5} \end{aligned}$$

$$\left.\begin{aligned} 2a-b+2c+2d &= 0 \\ -2a-2b+2c-d &= 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{aligned} -b+2d &= \tfrac{6}{5} \\ -2b-d &= -\tfrac{2}{5} \\ \hline b = -\tfrac{2}{25} &\Rightarrow d = \tfrac{14}{25} \end{aligned}$$

$$\boxed{y_0 = e^x\left[\left(-\frac{2}{5}x-\frac{2}{25}\right)\cos x + \left(-\frac{x}{5}+\frac{14}{25}\right)\sin x\right]}$$