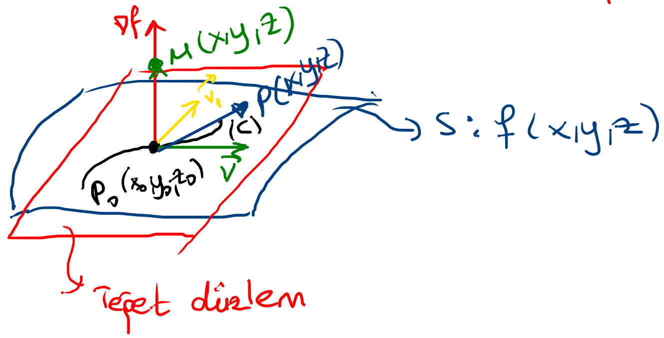
Teğet Düzlemler ve Normal Doğrusu



Eğer $\vec{r}(t)=x(t)\vec{i}+y(t)\vec{j}+z(t)\vec{k}$, $w=f(x,y,z)$ türevlenebilir fonksiyonunun $f(x,y,z)=c$ seviye yüzeyi üzerindeki düzgün bir eğri ise $f[x(t),y(t),z(t)]=c$ olacaktır. Her iki tarafı t'ye göre türetirsek;

$$\frac{df}{dt}=\frac{\partial f}{\partial x}\cdot\frac{dx}{dt}+\frac{\partial f}{\partial y}\cdot\frac{dy}{dt}+\frac{\partial f}{\partial z}\cdot\frac{dz}{dt}=0$$

$$\Rightarrow \underbrace{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\vec{i}+\frac{\partial f}{\partial y}\vec{j}+\frac{\partial f}{\partial z}\vec{k}\right)}_{\nabla f}\underbrace{\left(\frac{dx}{dt}\vec{i}+\frac{dy}{dt}\vec{j}+\frac{dz}{dt}\vec{k}\right)}_{\frac{d\vec{r}}{dt}}=0$$

Eğri boyunca her noktada ∇f eğrinin teğet vektörüne diktir. P_0 noktasından geçen tüm eğrilerin teğet vektörleri bu noktadaki gradyen vektöre (yüzeyin normal vektörüne) dik olacaktır. O halde P_0 noktasından geçen eğrilerin teğet doğrularının tümü ∇f'e dik olan düzlemde bulunur. Bu düzleme yüzeyin teğet düzlemi denir. P_0 noktasında yüzeyin normal doğrusu ise gradyen vektöre paralel bir doğrudur.

$$\overrightarrow{P_0P}\perp\nabla f(P_0)\Rightarrow\overrightarrow{P_0P}\cdot\nabla f(P_0)=0\Rightarrow\left[(x-x_0)\vec{i}+(y-y_0)\vec{j}+(z-z_0)\vec{k}\right]\left[\frac{\partial f}{\partial x}\Big|_{P_0}\vec{i}+\frac{\partial f}{\partial y}\Big|_{P_0}\vec{j}+\frac{\partial f}{\partial z}\Big|_{P_0}\vec{k}\right]=0$$

$$\Rightarrow \underbrace{\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{P_0}(x-x_0) + \left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{P_0}(y-y_0) + \left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{P_0}(z-z_0) = 0}_{\text{Teğet Düzlemin Denklemi}}$$

$$\overrightarrow{P_0M} \parallel \nabla f(P_0) \Rightarrow (x-x_0)\vec{i} + (y-y_0)\vec{j} + (z-z_0)\vec{k} = t\left[\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{P_0}\vec{i} + \left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{P_0}\vec{j} + \left.\frac{\partial f}{\partial z}\right|_{P_0}\vec{k}\right]$$

Normal Doğrusunun Vektörel Parametrik Denklemi

$$\left.\begin{aligned} x &= x_0 + t \cdot \left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{P_0} \\ y &= y_0 + t \cdot \left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{P_0} \\ z &= z_0 + t \cdot \left.\frac{\partial f}{\partial z}\right|_{P_0} \end{aligned}\right\} \text{Normal Doğrusunun Skaler Parametrik Denklemi}$$

Ör/ $f(x,y,z) = x^2+y^2+z-9=0$ yüzeyinin $P_0(1,2,4)$ noktasındaki teğet düzleminin ve normal doğrusunun denklemlerini yazınız.

$$\nabla f(x,y,z) = 2x\vec{i} + 2y\vec{j} + \vec{k}$$

$$\overrightarrow{P_0P} = (x-1)\vec{i} + (y-2)\vec{j} + (z-4)\vec{k}$$

$$\nabla f(1,2,4) = 2\vec{i} + 4\vec{j} + \vec{k}$$

$$\overrightarrow{P_0P} \cdot \nabla f(1,2,4) = 0 \Rightarrow 2(x-1) + 4(y-2) + (z-4) = 0$$

$$2x + 4y + z = 14 \rightarrow \text{Teğet Düz. Denk.}$$

$$\overrightarrow{P_0M} \parallel \nabla f(1,2,4) \Rightarrow (x-1)\vec{i} + (y-2)\vec{j} + (z-4)\vec{k} = t\left[2\vec{i} + 4\vec{j} + \vec{k}\right]$$

$$\left.\begin{aligned} x &= 1+2t \\ y &= 2+4t \\ z &= 4+t \end{aligned}\right\} \text{Normal doğ. skaler parametrik denk.}$$

Lineer Yaklaşımlar ve Diferansiyeller

Tek değişkenli fonksiyonlarda fonksiyonun $x=a$'daki teğet doğrusu onun bu noktadaki lineerizasyonudur. Ve fonksiyonun a noktası civarındaki değerlerine bir yaklaşım sağlar. Benzer şekilde $z=f(x,y)$ fonksiyonunun (a,b) noktasındaki teğet düzlemi fonksiyonun bu noktadaki Lineerizasyonudur. Lineer yaklaşım fonksiyonun (a,b) noktası civarındaki değerlerine bir yaklaşım sağlar.

$$z=f(x,y) \Rightarrow L(x,y)=\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{(a,b)}(x-a)+\left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{(a,b)}(y-b)+f(a,b)$$

$$w=f(x,y,z) \Rightarrow L(x,y,z)=\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{(a,b,c)}(x-a)+\left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{(a,b,c)}(y-b)+\left.\frac{\partial f}{\partial z}\right|_{(a,b,c)}(z-c)+f(a,b,c)$$

4

Ör/ $f(x,y)=\sqrt{2x^2+e^{2y}}$ fonksiyonu için $(2.2, -0.2)$ noktasında yaklaşık değer bulunuz.

$(2,0)$ civarında bir nokta verildiğinden bu $(2,0)$ noktasında Lineer yaklaşımı göz önüne alalım.

$$f(2,0)=\sqrt{2\cdot 4+e^0}=3 \qquad \frac{\partial f}{\partial x}=\frac{\cancel{4}^{2}x}{\cancel{2}\sqrt{2x^2+e^{2y}}} \qquad \frac{\partial f}{\partial y}=\frac{\cancel{2}e^{2y}}{\cancel{2}\sqrt{2x^2+e^{2y}}}$$

$$\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{(2,0)} = \frac{4}{3} \qquad \left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{(2,0)} = \frac{1}{3}$$

$$L(x,y) = \frac{4}{3}(x-2) + \frac{1}{3}(y-0) + 3$$

$$f(2.2,\,-0.2) \cong L(2.2,-0.2) = \frac{4}{3}(2.2-2) + \frac{1}{3}(-0.2) + 3$$

$$= \frac{4.(0.2)}{3} - \frac{(0.2)}{3} + 3$$

$$= 3.2$$

Ör/ $\sqrt{(2.98)^2 + (4.03)^2}$ 'nin yaklaşık değerini Lineer yaklaşımdan yararlanarak bulunuz.

$f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}$ $(3,4)$ noktasında lineer yaklaşım yapılabilir.

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

$$f(3,4) = 5, \quad \left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{(3,4)} = \frac{3}{5}, \quad \left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{(3,4)} = \frac{4}{5}$$

$$L(x,y) = \frac{3}{5}(x-3) + \frac{4}{5}(y-4) + 5$$

$$f(2.98, 4.03) \cong L(2.98, 4.03) = \frac{3}{5}(2.98-3) + \frac{4}{5}(4.03-4) + 5$$

$$= \frac{3}{5} \cdot (-0.02) + \frac{4}{5}(0.03) + 5$$

$$= \frac{0.06}{5} + 5 = \frac{25.06}{5} = 5.0012$$

Diferansiyel

$z = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ fonksiyonunun birinci mertebeden kısmi türevleri bir P_0 noktasında mevcut ise fonksiyonun toplam diferansiyeli

$$dz = df = \frac{\partial f}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2} dx_2 + \cdots + \frac{\partial f}{\partial x_n} dx_n$$

şeklindedir.

Eğer;
$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{f(a+h, b+k) - f(a,b) - h f_x(a,b) - k f_y(a,b)}{\sqrt{h^2+k^2}} = 0$$

ise $f(x,y)$ fonksiyonu (a,b) noktasında diferansiyellenebilirdir denir.

NOT:

Eğer $f(x,y)$ fonksiyonunun 1. mertebeden kısmi türevleri (a,b) noktasının bir komşuluğunda sürekli iseler o zaman f fonksiyonu (a,b) noktasında diferansiyellenebilirdir.

Ör/

- $z=x^2+y^2 \Rightarrow dz = 2x\,dx + 2y\,dy$
- $z=\sin 2x - \cos(xy) \Rightarrow dz = [2\cos 2x + y\sin(xy)]dx + x\sin(xy)\,dy$
- $f(x,y,z) = x^3+y^3-3xyz \Rightarrow df(1,1,-2) = ?$

$$df = (3x^2-3yz)dx + (3y^2-3xz)dy - 3xy\,dz$$

$$df(1,1,-2) = 9\,dx + 9\,dy - 3\,dz$$

Yaklaşık hesaplamada diferansiyel $dx = \Delta x$, $dy = \Delta y$

$$\Delta z \cong dz$$

$$f(a+\Delta x, b+\Delta y) - f(a,b) \cong \left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{(a,b)} dx + \left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{(a,b)} dy \Rightarrow f(a+\Delta x, b+\Delta y) \cong f(a,b) + \left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{(a,b)} \Delta x + \left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{(a,b)} \Delta y$$

Ör/ Eğer $w = \frac{x^2 y^3}{z^4}$ fonksiyonunda x; %1, y; %2, z; %3 arttırılırsa fonksiyonun değişim miktarı yüzde kaç azalır veya artar?

$dx = x.(0.01)$

$dy = y.(0.02)$

$dz = z.(0.03)$

$$dw = \frac{\partial w}{\partial x} dx + \frac{\partial w}{\partial y} dy + \frac{\partial w}{\partial z} dz$$

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial w}{\partial x} &= \frac{2xy^3}{z^4} \\ \frac{\partial w}{\partial y} &= \frac{3x^2y^2}{z^4} \\ \frac{\partial w}{\partial z} &= -\frac{4x^2y^3}{z^5} \end{aligned}\right\}$$

$$dw = \frac{2xy^3}{z^4} \cdot \left[x.(0.01)\right] + \frac{3x^2y^2}{z^4} \cdot \left[y.(0.02)\right] + \frac{(-4x^2y^3)}{z^5} \left[z.(0.03)\right]$$

$$= \frac{2x^2y^3}{z^4} \cdot (0.01) + \frac{3x^2y^3}{z^4} (0.02) - \frac{4x^2y^3}{z^4} (0.03)$$

$$= \frac{x^2y^3}{z^4} \left[0.02 + 0.06 - 0.12\right]$$

$$= -(0.04) \cdot \frac{x^2y^3}{z^4} = -\frac{4}{100} \cdot w$$

%4 azalır.

Ekstrem Değerler

İki değişkenli bir fonksiyon tanım bölgesindeki bir (a,b) noktasında, (a,b) noktasına yeterince yakın fonksiyonun tanım bölgesindeki tüm (x,y)'ler için $f(x,y) \leq f(a,b)$ ise bir yerel (izafi) maksimum (veya $f(x,y) \geq f(a,b)$ ise bir yerel (izafi) minimum) değere sahiptir deriz. Eğer eşitsizlik fonksiyonun tanım bölgesindeki tüm (x,y)'ler için sağlanırsa fonksiyonun (a,b) noktasında bir mutlak (global) maksimum (veya minimum) değere sahip olduğunu söyleriz.

Teorem 1 (Ekstrem değerler için gerekli koşullar)

Bir $f(x,y)$ fonksiyonu kendi tanım bölgesindeki bir (a,b) noktasında aşağıdaki durumlardan biri söz konusu ise bir yerel veya mutlak ekstrem değere sahip olabilir:

1) (a,b) noktası fonksiyonun bir kritik noktası ise (fonksiyonun 1. mertebeden türevlerini sıfır yapan nokta ise)

2) (a,b) noktası fonksiyonun bir tekil noktası ise (fonksiyonun 1. mertebeden türevlerini tanımsız kılan nokta ise)

3) (a,b) noktası fonksiyonun tanım bölgesinin bir sınır noktası ise

Teorem 2 (Ekstrem Değerler için Yeterli Koşullar)

Eğer f, tanım bölgesi $\mathbb{R}^2$'de kapalı ve sınırlı bir bölge olan iki değişkenli sürekli bir fonksiyon ise o zaman fonksiyonun görüntü kümesi reel sayıların sınırlı bir kümesidir ve tanım bölgesinde fonksiyonun maksimum ve minimum değerlerini aldığı noktalar vardır.

ÖRNEKLER

1) $f(x,y) = x^2+y^2$ ekstremum değerlerini bulunuz.

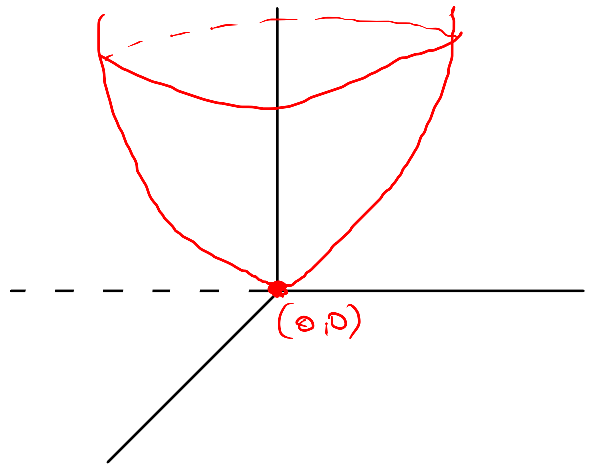
$D(f) : \mathbb{R}^2$

$\frac{\partial f}{\partial x} = 2x = 0 \Rightarrow x=0$

$\frac{\partial f}{\partial y} = 2y = 0 \Rightarrow y=0$

$(0,0) \rightarrow$ kritik nokta

$f(0,0) = 0 \leq f(x,y)$ $\rightarrow$ mutlak minimum değerdir.



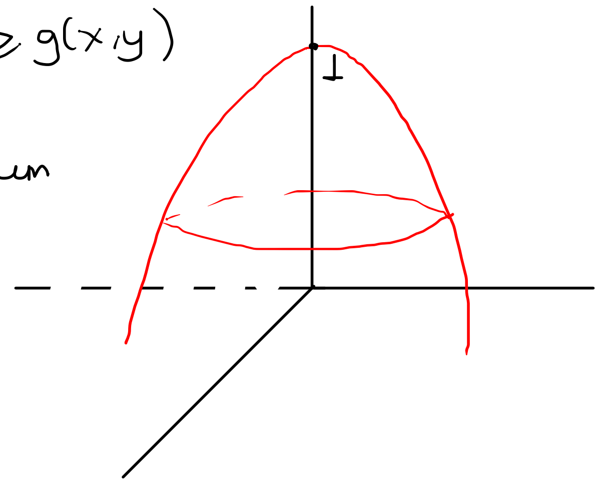
2) $g(x,y) = 1 - x^2 - y^2$

$D(f): \mathbb{R}^2$

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial g}{\partial x} &= -2x = 0 \Rightarrow x = 0 \\ \frac{\partial g}{\partial y} &= -2y = 0 \Rightarrow y = 0 \end{aligned}\right\} (0,0) \text{ kritik nokta.}$$

$g(0,0) = 1 - 0 - 0 = 1 \geqslant g(x,y)$

mutlak maksimum değer



3) $h(x,y) = \sqrt{x^2 + y^2}$

$D(f): \mathbb{R}^2$

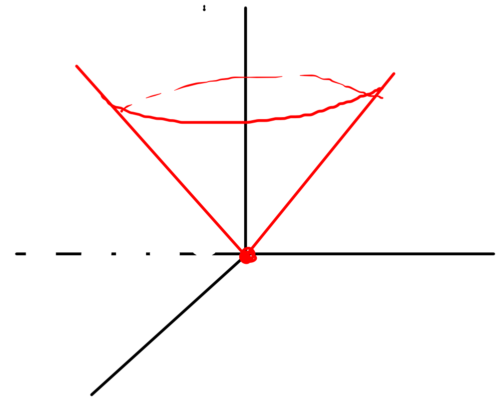
$$\frac{\partial h}{\partial x} = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} = 0 \Rightarrow x = 0$$

$$\frac{\partial h}{\partial y} = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} = 0 \Rightarrow y = 0$$

$$\left.\begin{aligned} \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} &= \lim_{x\to 0^+}\left[\lim_{y\to 0} \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\right] = \lim_{x\to 0^+} \frac{x}{|x|} = 1 \\ \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} &= \lim_{x\to 0^-}\left[\lim_{y\to 0} \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\right] = \lim_{x\to 0^-} \frac{x}{|x|} = -1 \end{aligned}\right\} \neq$$

$(0,0) \to$ tekil nokta.

$h(0,0) = 0 \leq h(x,y)$



4) $f(x,y) = y^2 - x^2$

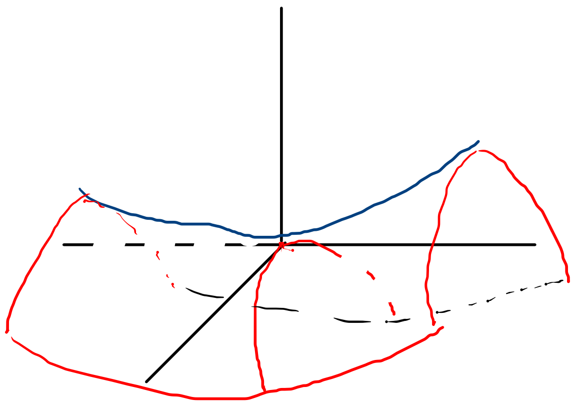
$D(f): \mathbb{R}^2$

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{\partial h}{\partial x} = -2x = 0 \Rightarrow x = 0 \\[2ex] \dfrac{\partial h}{\partial y} = 2y = 0 \Rightarrow y = 0 \end{array}\right\} \begin{array}{l} (0,0) \\ \text{kritik} \\ \text{nokta} \end{array}$$

$(0,a) \to f(0,a) = a^2 > 0$

$(a,0) \to f(a,0) = -a^2 < 0$

$f(0,0) = 0$



$f(x,y)$ fonksiyonu $(0,0)$ noktasında bir kritik noktaya sahiptir fakat bu noktada ne yerel maksimum ne de yerel minimum değere sahiptir. $f(0,0) = 0$ olmasına karşın sıfırdan farklı x ve y değerleri için $f(x,0) < 0$ $f(0,y) > 0$ dır. Böyle noktalara eyer noktası denir.

5) $f(x,y) = 1 - x$

$D(f): \mathbb{R}^2 \longrightarrow D(f|) = x^2+y^2 \leq 1$

kısıtlanmış tanım bölgesi

$\dfrac{\partial f}{\partial x} = -1$

$\dfrac{\partial f}{\partial y} = 0$

Ne kritik noktası ne de tekil noktası vardır.