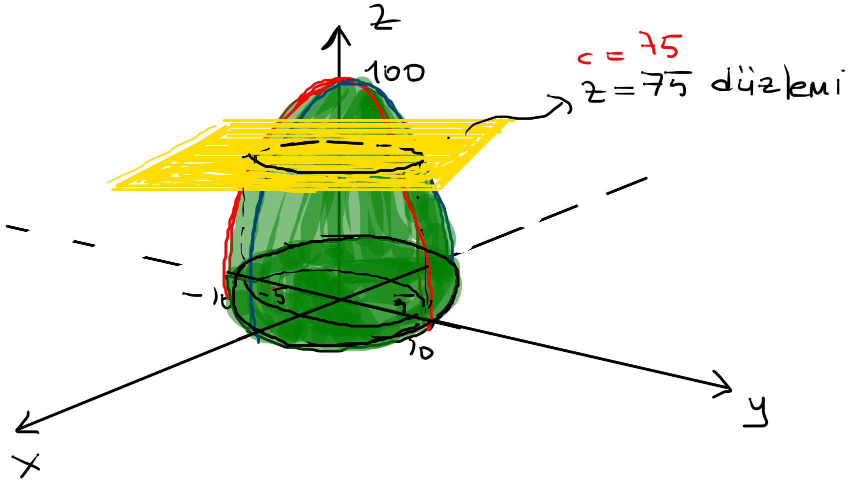
Bir $f(x,y)$ fonksiyonunun bir $f(x,y)=c$ sabit değerine sahip olduğu düzlemdeki noktaların kümesi f'in seviye eğrisi olarak adlandırılır. f'in tanım kümesindeki (x,y) için uzaydaki bütün $(x,y,f(x,y))$ noktaları kümesi f'in grafiğidir. f'in grafiğine $z=f(x,y)$ yüzeyi denir.



$z = 100 - x^2 - y^2$ $\qquad$ $c=75 \Rightarrow 75 = 100 - x^2 - y^2 \Rightarrow x^2+y^2=25$

$x=0 \Rightarrow z = 100 - y^2$ parabol.

$y=0 \Rightarrow z = 100 - x^2$ parabol.

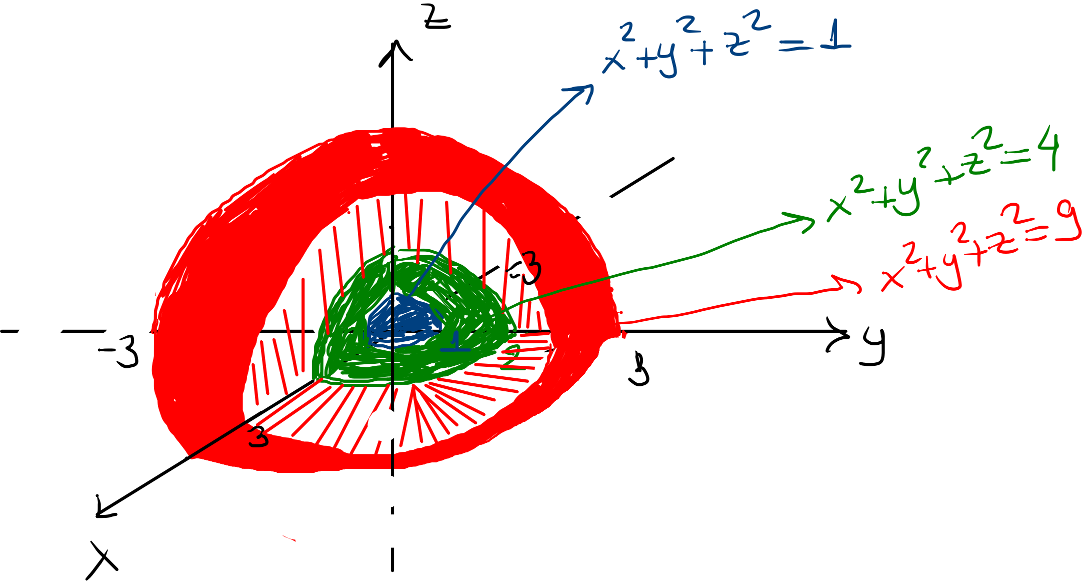
$z=0 \Rightarrow x^2+y^2=100$ çember

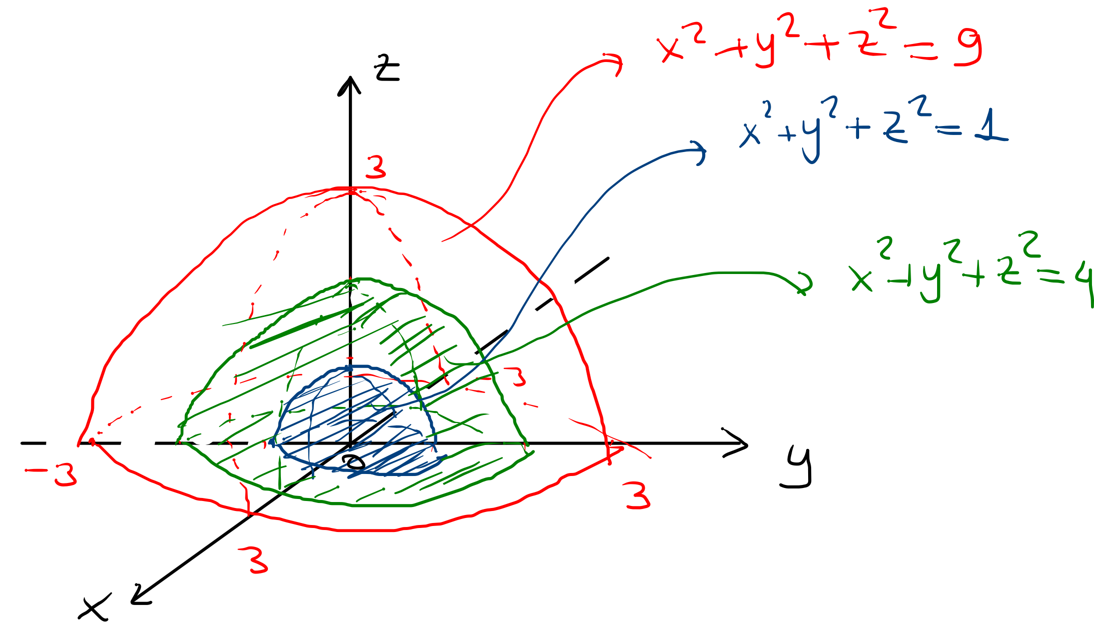
Uzayda, üç bağımsız değişkenli bir fonksiyonun sabit bir $f(x,y,z)=c$ değerine sahip olduğu (x,y,z) noktaları kümesi, f'in seviye yüzeyi olarak tanımlanır. f'in grafiğine $u=f(x,y,z)$ hiper yüzeyi denir.

$u=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$ $\qquad$ $u=1 \Rightarrow x^2+y^2+z^2=1$

$u=2 \Rightarrow x^2+y^2+z^2=4$

$u=3 \Rightarrow x^2+y^2+z^2=9$


z
$x^2+y^2+z^2=1$
$x^2+y^2+z^2=4$
$x^2+y^2+z^2=9$
-3
3
y
x


z
$x^2+y^2+z^2=9$
$x^2+y^2+z^2=1$
$x^2+y^2+z^2=4$
3
-3
y
x

Lineer ve kuadratik yüzeyler

Düzlem

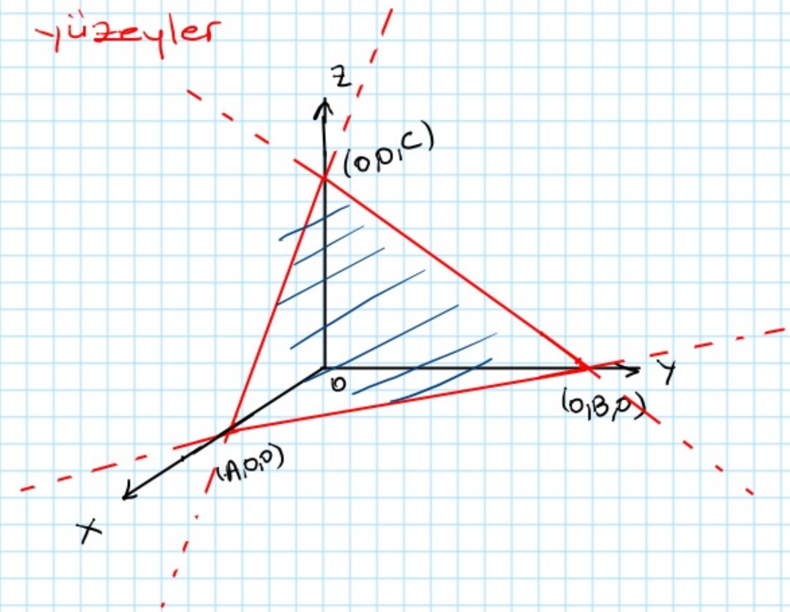
1°) $ax+by+cz+d=0$

$$ax+by+cz=-d$$

$$\frac{a}{-d}x+\frac{b}{-d}y+\frac{c}{-d}z=1$$

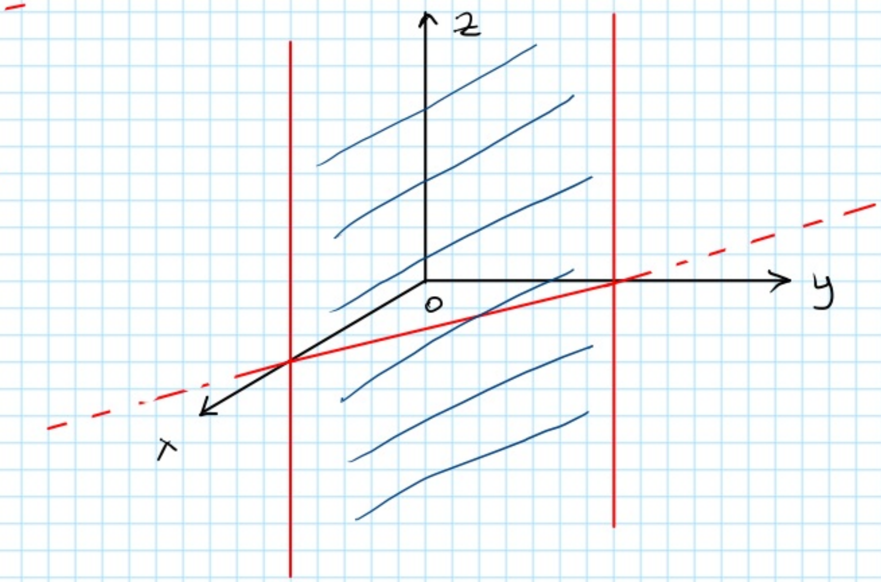
$$-\frac{a}{d}=\frac{1}{A},\quad \frac{b}{-d}=\frac{1}{B},\quad \frac{c}{-d}=\frac{1}{C}$$

$$\Rightarrow \underbrace{\frac{x}{A}+\frac{y}{B}+\frac{z}{C}=1}_{\text{Düzlemin kesen formu}}$$



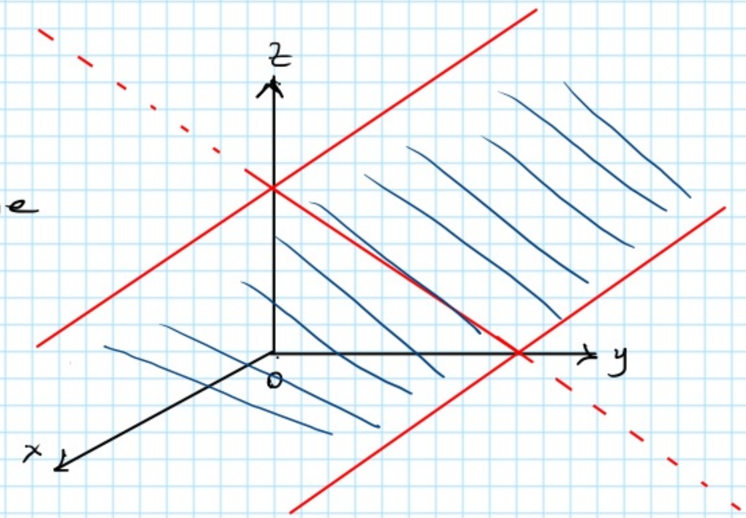
2°) $ax+by+d=0$

$z=0$ olduğu için z-eksenine paralel hareket eder.



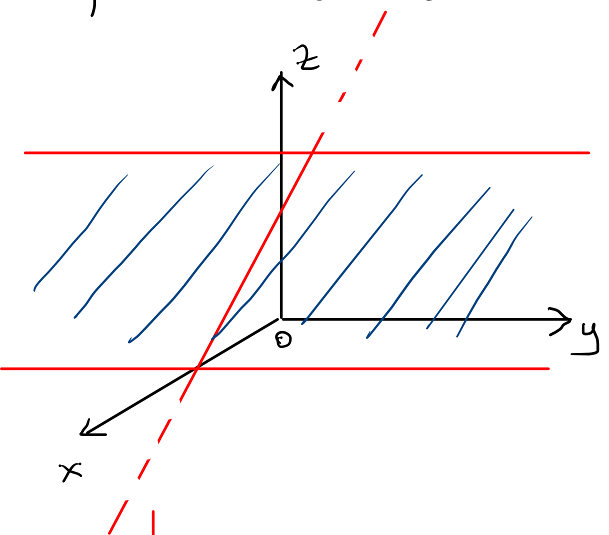
3°) $by+cz+d=0$

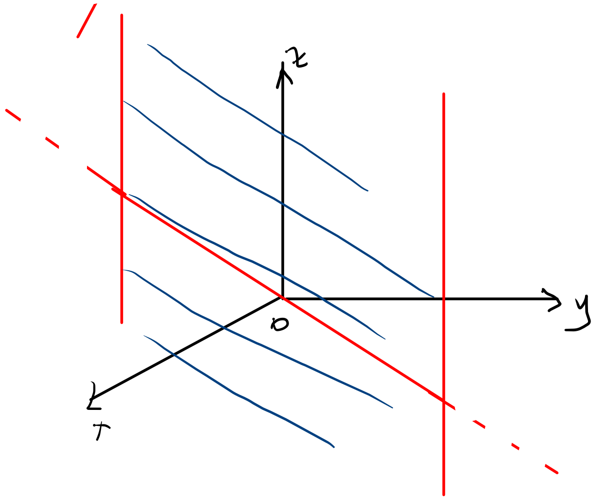
$x=0$ olduğu için x-eksenine paralel hareket eder.



4°) $ax + cz + d = 0$

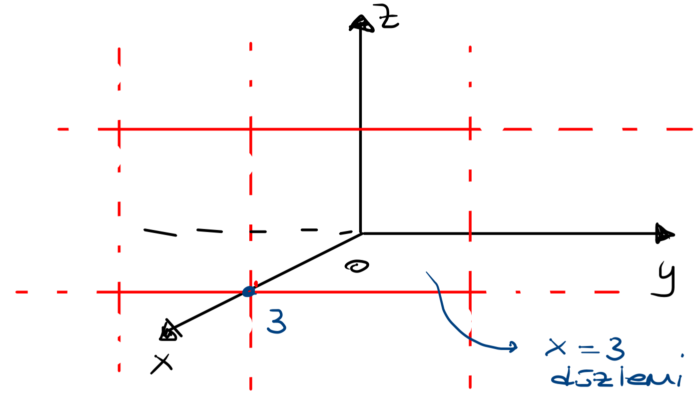
$y = 0$ olduğundan y-eksenine paralel hareket eder.

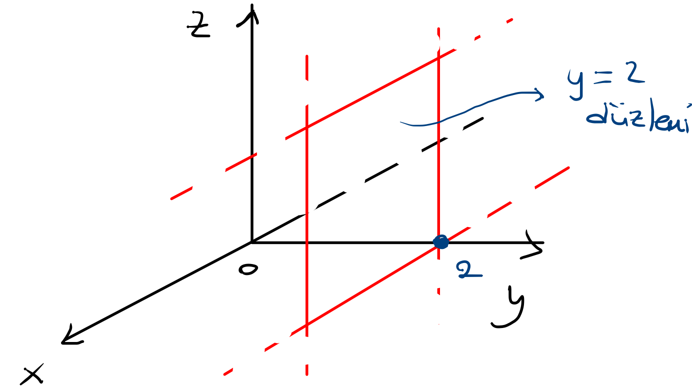




5°) $d \neq 0$, $b = c = 0$, $a \neq 0 \Rightarrow ax + d = 0 \Rightarrow x = -\frac{d}{a}$ düzlemi

yoz-düzlemine paralel, x eksenine dik bir düzlemdir.





6°) $d \neq 0$, $a = c = 0$, $b \neq 0 \Rightarrow by + d = 0 \Rightarrow y = \frac{-d}{b}$ düzlemi

xoz-düzlemine paralel, y-eksenine dik bir düzlemdir.

7°) $d \neq 0$, $a = b = 0$, $c \neq 0 \Rightarrow cz + d = 0 \Rightarrow z = \frac{-d}{c}$ düzlemi

xoy-düzlemine paralel, z-eksenine dik bir düzlemdir.

8°) $d = 0$, $a \neq 0, b \neq 0, c \neq 0$ ise düzlem orjinden geçer.

Küre

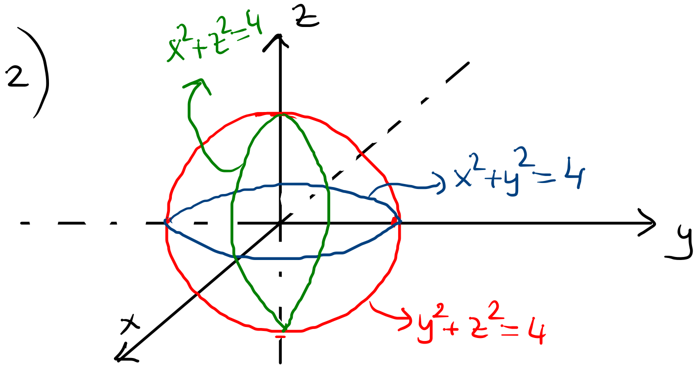
Genel denklemi $(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=r^2$ merkez $M(a,b,c)$ yarıçap r

Ö/ $x^2+y^2+z^2=4$ $\left(M(0,0,0) \quad r=2\right)$

$x=0 \Rightarrow y^2+z^2=4$

$y=0 \Rightarrow x^2+z^2=4$

$z=0 \Rightarrow x^2+y^2=4$



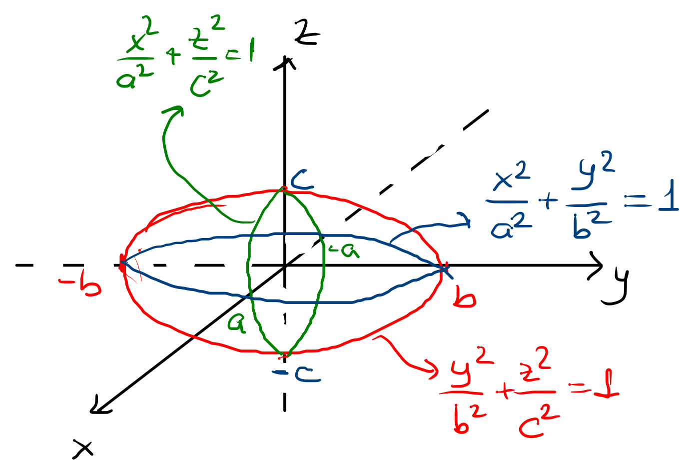
Elipsoid

Genel denklemi $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1$

$x=0 \Rightarrow \dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1 \rightarrow$ Elips

$y=0 \Rightarrow \dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1$

$z=0 \Rightarrow \dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$



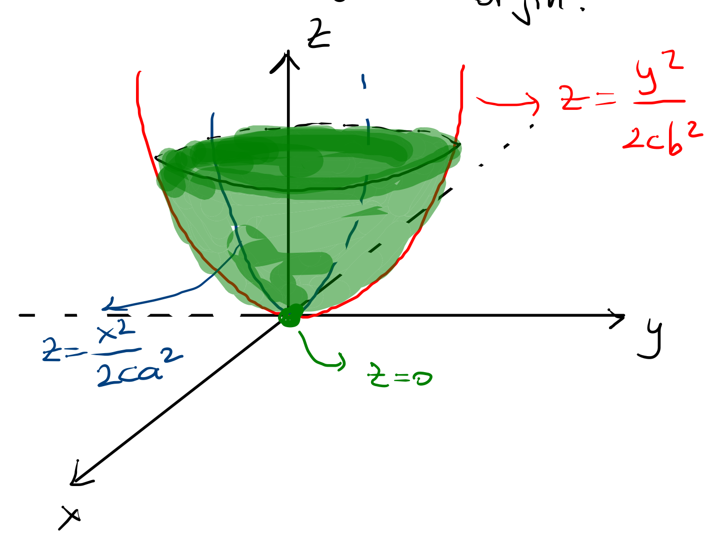
Paraboloid

$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=2cz$

$x=0 \Rightarrow z=\dfrac{y^2}{2cb^2} \rightarrow$ parabol

$y=0 \Rightarrow z=\dfrac{x^2}{2ca^2} \rightarrow$ parabol

$z=0 \Rightarrow \dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=0 \rightarrow x=0,\ y=0$ orjin.



Koni

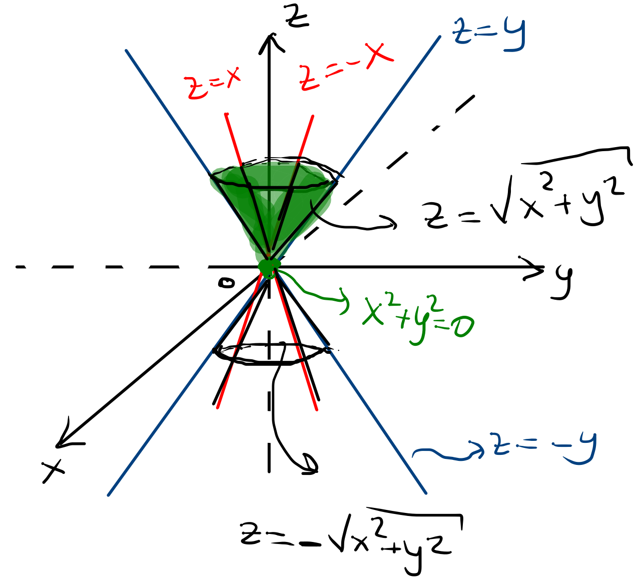
$$a^2x^2 + b^2y^2 = c^2z^2$$

Ör/ $x^2+y^2=z^2$

$x=0 \Rightarrow y^2=z^2 \Rightarrow z=\mp y$

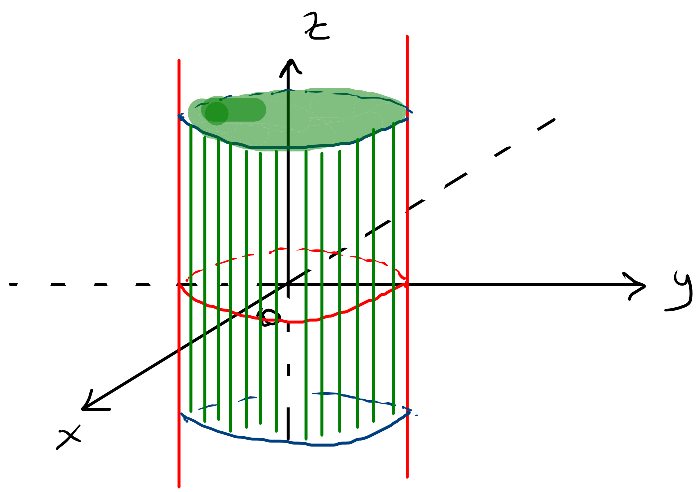
$y=0 \Rightarrow x^2=z^2 \Rightarrow z=\mp x$

$z=0 \Rightarrow x^2+y^2=0 \rightarrow$ orjin



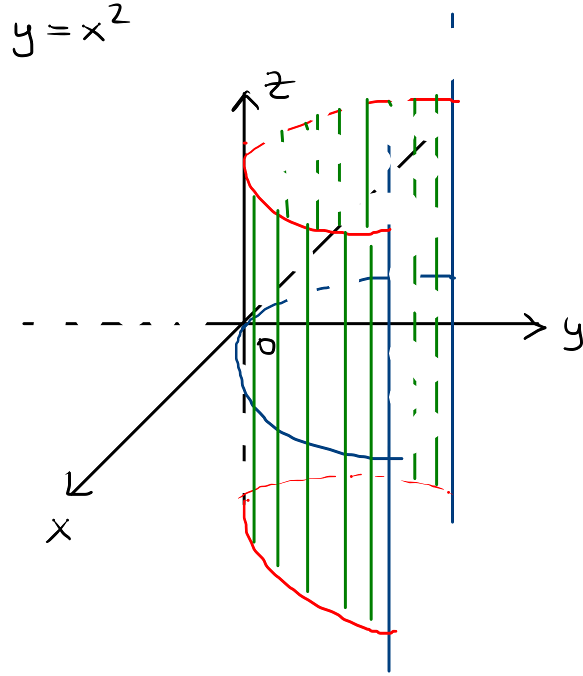
Silindir

Ör/ $x^2+y^2=4$



Parabolik Silindir

Ör/ $y=x^2$



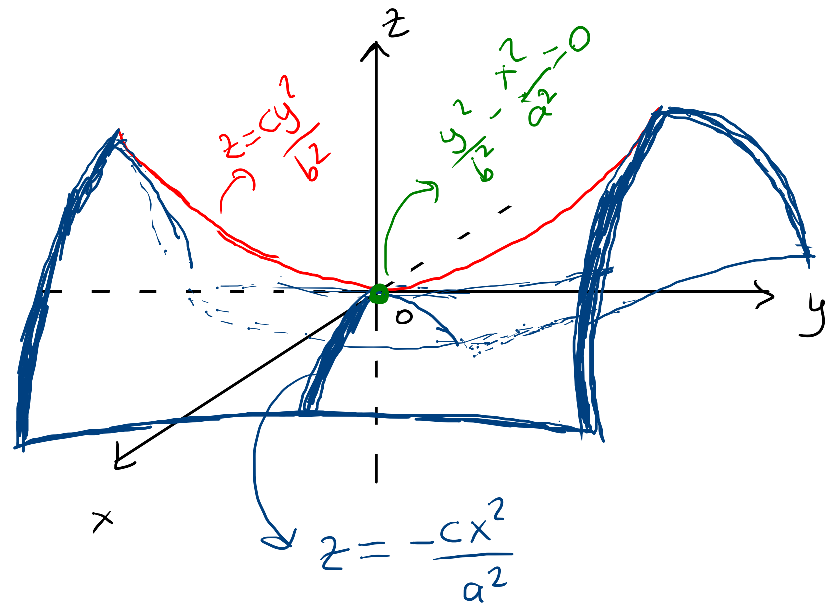
Hiperbolik Paraboloid

$$\frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2} = \frac{z}{c} \qquad (c>0)$$

$x=0 \Rightarrow z = \dfrac{cy^2}{b^2} \rightarrow$ parabol

$y=0 \Rightarrow z = \dfrac{-cx^2}{a^2} \rightarrow$ parabol

$z=0 \Rightarrow \dfrac{y^2}{b^2} - \dfrac{x^2}{a^2} = 0$ orjin



Limit ve Süreklilik

Tanım: Eğer (a,b) noktasına yeterince yakın tüm (x,y) noktaları için $f(x,y)$'nin değerleri belli bir reel L sayısına keyfi derecede yakın ise (x,y), (a,b)'ye yaklaşırken $f(x,y)$, L limitine yaklaşır denir.

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y) = L$$

şeklinde gösterilir.

Tanım (ε–δ)

Eğer

i) (a,b) noktasının her komşuluğu f fonksiyonunun tanım kümesinden ((a,b) noktasından farklı) noktalar içeriyorsa

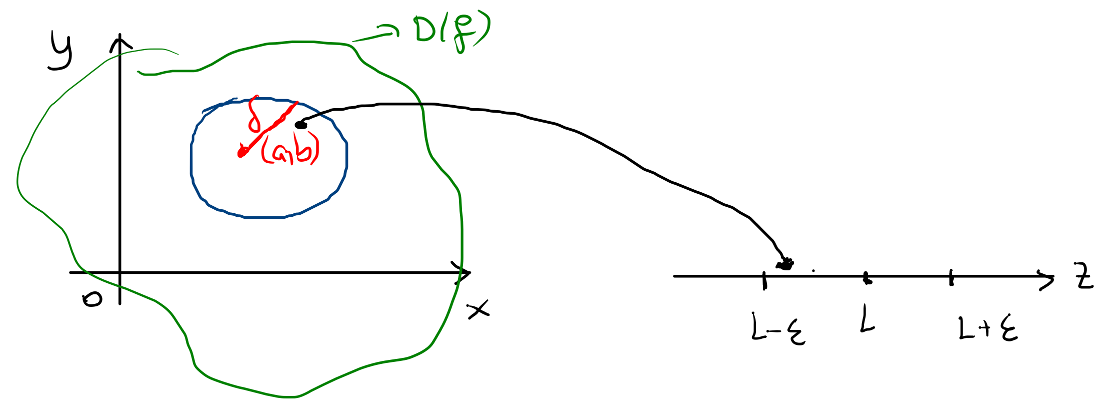
$$(x-a)^2+(y-b)^2<\delta^2$$

ve

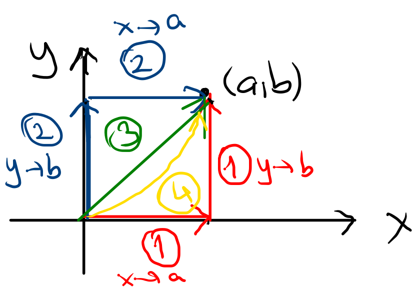
ii) Her $\varepsilon>0$ sayısı için $0<\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2}<\delta$ iken $|f(x,y)-L|<\varepsilon$ olacak şekilde bir $\delta=\delta(\varepsilon)>0$ sayısı bulunabiliyorsa o zaman (x,y), (a,b)'ye yaklaşırken $f(x,y)$, L limitine yaklaşır ve

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y)=L \quad / \quad \lim_{\substack{x\to a\\ y\to b}} f(x,y)=L$$

şeklinde gösterilir.



NOT: Limit varsa tektir.



İki değişkenli bir fonksiyon için (x,y) noktasının, fonksiyonun tanım kümesinde (a,b) noktasına yaklaşımı nasıl olursa olsun eğer f(x,y) aynı L sayısına yaklaşıyorsa o zaman fonksiyon limite sahiptir denir. Yani limit yola bağlı olmamalıdır.

Çift yol testi

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y) = \lim_{x\to a}\left[\lim_{y\to b} f(x,y)\right]$$

$$\neq \Rightarrow \text{limit yoktur.}$$

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y) = \lim_{y\to b}\left[\lim_{x\to a} f(x,y)\right]$$

(Ancak eşit çıkmaları limitin var olduğunu göstermez)

Teorem (a,b)'nin her komşuluğu $D(f)\cap D(g)$'den noktalar içermek üzere

$\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y) = L$, $\lim_{(x,y)\to(a,b)} g(x,y) = M$ olsun. $k\in\mathbb{R}$ olsun.

1°) $\lim_{(x,y)\to(a,b)} \left[f(x,y) \mp g(x,y)\right] = \lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y) \mp \lim_{(x,y)\to(a,b)} g(x,y) = L \mp M$

2°) $\lim_{(x,y)\to(a,b)} \left(k f(x,y)\right) = k.\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y) = k.L$

3°) $\lim_{(x,y)\to(a,b)} \left[f(x,y).g(x,y)\right] = \left[\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y)\right]\left[\lim_{(x,y)\to(a,b)} g(x,y)\right] = L.M$

4°) $\lim\limits_{(x,y)\to(a,b)} \dfrac{f(x,y)}{g(x,y)} = \dfrac{\lim\limits_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y)}{\lim\limits_{(x,y)\to(a,b)} g(x,y)} = \dfrac{L}{M}$ ($M \neq 0$ olmak koşuluyla)

5°) $\lim\limits_{(x,y)\to(a,b)} \left[f(x,y)\right]^n = \left[\lim\limits_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y)\right]^n = L^n$

6°) $\lim\limits_{(x,y)\to(a,b)} \sqrt[n]{f(x,y)} = \sqrt[n]{L}$ ($n \in \mathbb{Z}^+$ ve n çift ise $L>0$ olmak koşuluyla)

ÖRNEKLER

1°) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,1)} \dfrac{x - xy + 3}{x^2y + 5xy - y^3} = \dfrac{0 - 0.1 + 3}{0.1 + 5 0.1 - 1^3} = -3$

2°) $\lim\limits_{(x,y)\to(3,-4)} \sqrt{x^2+y^2} = \sqrt{3^2+(-4)^2} = 5$

3°) $\lim\limits_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ x\neq y}} \dfrac{x^2 - xy}{\sqrt{x} - \sqrt{y}} \overset{\frac{0}{0}}{=} \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^2-xy}{\sqrt{x}-\sqrt{y}} \cdot \dfrac{\sqrt{x}+\sqrt{y}}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}$

$= \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x\,\cancel{(x-y)}\,(\sqrt{x}+\sqrt{y})}{\cancel{(x-y)}}$

$= \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} x(\sqrt{x}+\sqrt{y}) = 0$

4) $\lim\limits_{\substack{(x,y)\to(1,1)\\(x\neq y)}} \dfrac{x^2-2xy+y^2}{x-y} = \dfrac{1-2+1}{1-1} \stackrel{0/0}{=} \lim\limits_{(x,y)\to(1,1)} \dfrac{(x-y)^2}{x-y} = \lim\limits_{(x,y)\to(1,1)} (x-y) = 0$

5) $\lim\limits_{\substack{(x,y)\to(1,2)\\(2x\neq y)}} \dfrac{2x^2-3xy+y^2}{2x^2+xy-y^2} = \dfrac{2-6+4}{2+2-4} \stackrel{0/0}{=} \lim\limits_{(x,y)\to(1,2)} \dfrac{2x^2-2xy-xy+y^2}{2x^2+xy-y^2+xy-xy} = \lim\limits_{(x,y)\to(1,2)} \dfrac{x(2x-y)-y(2x-y)}{x(2x-y)+y(2x-y)}$

$= \lim\limits_{(x,y)\to(1,2)} \dfrac{(x-y)}{x+y} = \dfrac{1-2}{1+2} = -\dfrac{1}{3}$

6) $f(x,y) = \dfrac{2x^2y}{x^4+y^2}$ fonksiyonunun $(x,y)\to(0,0)$ iken limitinin varlığını araştırınız.

1. $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{2x^2y}{x^4+y^2} \stackrel{0/0}{=} \lim\limits_{y\to 0}\left[\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{2x^2y}{x^4+y^2}\right] = \lim\limits_{y\to 0}\left[\underbrace{\dfrac{0}{y^2}}_{=0}\right] = 0$

2. $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{2x^2y}{x^4+y^2} \stackrel{0/0}{=} \lim\limits_{x\to 0}\left[\lim\limits_{y\to 0} \dfrac{2x^2y}{x^4+y^2}\right] = \lim\limits_{x\to 0}\left[\underbrace{\dfrac{0}{x^4}}_{=0}\right] = 0$

3. Bir doğru boyunca yaklaşalım, $y=kx$

$\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{2x^2y}{x^4+y^2} = \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y=kx}} \dfrac{2x^2 \cdot kx}{x^4+(kx)^2}$

$= \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{2kx^3}{x^4+k^2x^2}$

$= \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{2kx^{\cancel{3}}}{\cancel{x^2}(x^2+k^2)}$

$= \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{2kx}{x^2+k^2} = \dfrac{0}{k^2} = 0$

4. Bir eğri boyunca yaklaşalım; $y=kx^2$

$\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{2x^2y}{x^4+y^2} \stackrel{0/0}{=} \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y=kx^2}} \dfrac{2x^2 \cdot (kx^2)}{x^4+(kx^2)^2} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{2kx^4}{x^4+k^2x^4} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{2k\cancel{x^4}}{\cancel{x^4}(1+k^2)} = \dfrac{2k}{1+k^2}$

k'nın her farklı değeri için sonuçlar birbirlerinden farklı olacağından fonksiyonun orjinde limiti yoktur.

7) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(1,1)} \frac{y\sin(\pi x)}{x+y-2}$ fonksiyonunun limitinin mevcut olup olmadığını araştırınız.

$$\lim_{(x,y)\to(1,1)} \frac{y\sin(\pi x)}{x+y-2} = \lim_{y\to 1}\left[\lim_{x\to 1} \frac{y\sin(\pi x)}{x+y-2}\right] = \lim_{y\to 1}\left[\frac{y\cdot\sin\pi}{1+y-2}\right] = \lim_{y\to 1}\left[\frac{0}{\underbrace{y-1}_{0}}\right] = 0$$

$\neq$

$$\lim_{(x,y)\to(1,1)} \frac{y\sin(\pi x)}{x+y-2} = \lim_{x\to 1}\left[\lim_{y\to 1} \frac{y\sin(\pi x)}{x+y-2}\right] = \lim_{x\to 1}\left[\frac{\sin\pi x}{x-1}\right] \overset{\frac{0}{0}}{\underset{LH}{=}} \lim_{x\to 1} \frac{\pi\cos\pi x}{1} = -\pi$$

$(1,1)$ noktasında fonksiyonun limiti yoktur.

8) $f(x,y) = \dfrac{x^2y}{x^2+y^2}$ fonksiyonunun orjinde limite sahip olduğunu gösteriniz

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y}{x^2+y^2} = \lim_{y\to 0}\left[\lim_{x\to 0} \frac{x^2y}{x^2+y^2}\right] = \lim_{y\to 0}\left[\frac{0}{\underbrace{y^2}_{\neq 0}}\right] = 0$$

$\varepsilon>0$ verildiğinde $0<\sqrt{x^2+y^2}<\delta$ iken $\left|\dfrac{x^2y}{x^2+y^2}-0\right|<\varepsilon$ o.ş. $\delta=\delta(\varepsilon)>0$ bulmalıyız.

$$\left|\frac{x^2y}{x^2+y^2}\right| \qquad x^2\le x^2+y^2 \Rightarrow \frac{x^2}{x^2+y^2}\le 1 \Rightarrow \left|\frac{x^2y}{x^2+y^2}\right| \le |y| \le \sqrt{x^2+y^2} < \varepsilon \Rightarrow \delta=\varepsilon>0 \text{ alınırsa}$$

$\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y}{x^2+y^2} = 0$ olur.

Süreklilik

Tanım:

$\lim\limits_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y) = f(a,b)$ ise fonksiyon (a,b) noktasında süreklidir denir.

- $f(x,y)$, (a,b) noktasında tanımlı olmalı
- $\lim\limits_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y)$ mevcut olmalı
- fonksiyonun (a,b) noktasındaki limit değeri bu noktadaki değerine eşit olmalı.

Tanım:

Her $\varepsilon>0$ sayısı için $0<\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2}<\delta$ iken $|f(x,y)-f(a,b)|<\varepsilon$ olacak şekilde $\delta=\delta(\varepsilon)>0$ sayısı bulunabiliyorsa $f(x,y)$, (a,b) noktasında süreklidir denir.

ÖRNEKLER

1) $f(x,y)=\begin{cases} \dfrac{2xy}{x^2+y^2} & (x,y)\neq(0,0) \\ 0 & (x,y)=(0,0) \end{cases}$ fonksiyonunun $(0,0)$ noktasındaki sürekliliğini inceleyiniz.

$f(0,0)=0$ ✓

$$\left\{\begin{array}{l} \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{2xy}{x^2+y^2} = \lim\limits_{x\to0}\left[\lim\limits_{y\to0} \dfrac{2xy}{x^2+y^2}\right] = \lim\limits_{x\to0}\left[\dfrac{0}{x^2}\right] = 0 \\ \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{2xy}{x^2+y^2} = \lim\limits_{\substack{x\to0 \\ y=kx}} \dfrac{2x\cdot kx}{x^2+(kx)^2} = \lim\limits_{x\to0} \dfrac{2kx^2}{x^2(1+k^2)} = \dfrac{2k}{1+k^2} \end{array}\right\} \neq$$

$\Leftarrow$ limit olmadığından fonksiyon orjinde süreksizdir.

2) $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy-y^2}{\sqrt{x}+\sqrt{y}} & \dfrac{x>0,\ y>0}{} \\ 0 & (x,y)=(0,0) \end{cases}$ fonksiyonunun orjinde sürekli olduğunu gösteriniz.

$f(0,0)=0$ ✓

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy-y^2}{\sqrt{x}+\sqrt{y}} = \lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0\\ (x\neq y)}} \frac{y\cancel{(x-y)}(\sqrt{x}-\sqrt{y})}{\cancel{(x-y)}} = \lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} y(\sqrt{x}-\sqrt{y}) = 0 = f(0,0)$$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy-y^2}{\sqrt{x}+\sqrt{y}} = \lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ x=y}} \frac{x^2-x^2}{\sqrt{x}+\sqrt{x}} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \Big[\underbrace{\frac{0}{2\sqrt{x}}}_{=0}\Big] = 0 = f(0,0)$$

f, $(0,0)$'da süreklidir.

3) $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^3 - xy^2}{x^2+y^2} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$ fonksiyonunun $(0,0)$'da sürekli olduğunu gösteriniz.

$f(0,0) = 0$ ✓

$\forall \varepsilon > 0$ sayısı için $0 < \sqrt{x^2+y^2} < \delta$ iken $\left| \dfrac{x^3 - xy^2}{x^2+y^2} - \overset{f(0,0)}{0} \right| < \varepsilon$ olacak şekilde bir $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ sayısı var mıdır?

$|x| \leq \sqrt{x^2+y^2} < \delta$

$$\left| \frac{x^3 - xy^2}{x^2+y^2} \right| = \left| \frac{x(x^2-y^2)}{x^2+y^2} \right| = |x| \cdot \left| \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} \right| \leq |x| \cdot \left| \frac{x^2+y^2}{x^2+y^2} \right| < |x| < \delta = \varepsilon > 0$$

olduğundan $\lim\limits_{(x,y) \to (0,0)} f(x,y) = f(0,0)$'dır. Yani fonksiyon $(0,0)$'da süreklidir.

Bileşkelerin sürekliliği

Eğer $f(x,y)$ fonksiyonu (x_0,y_0) noktasında sürekli ve g fonksiyonu da $f(x_0,y_0)$'da sürekli olan tek değişkenli bir fonksiyon ise bu durumda $g[f(x,y)]$ fonksiyonu (x_0,y_0)'da süreklidir.

Ör/ e^{x-y} , $\overbrace{\ln(\underbrace{1+x^2+y^2}_{f(x,y)})}^{g(u)}$

$\downarrow$

$z = f(x,y) = x-y$

$g = e^z$

$g = e^{x-y}$