

Uygulama -

1) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n\sqrt{n}}{(n+1)\sqrt[3]{n^4+1}}$ serisinin karakterini belirleyiniz.

$$a_n = \frac{n\sqrt{n}}{(n+1)\sqrt[3]{n^4+1}} \quad \begin{array}{l} \rightarrow 1+\frac{1}{2} = \frac{3}{2} \\ \rightarrow 1+\frac{4}{3} = \frac{7}{3} \end{array} \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{7}{3} - \frac{3}{2} = \frac{14-9}{6} = \frac{5}{6} \end{array} \right.$$

$$b_n = \frac{1}{n^{5/6}}$$

$$\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n\sqrt{n}}{(n+1)\sqrt[3]{n^4+1}} \cdot n^{5/6} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^{7/3}}{(n+1)\sqrt[3]{n^4+1}} = 1 \neq 0, \infty \quad \text{Her iki seri aynı karakterdedir.}$$

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{5/6}}$ p-serisi $p = \frac{5}{6} < 1$ olduğundan ıraksaktır. Dolayısıyla verilen seri de ıraksaktır.

2) $\sum_{k=0}^{\infty} \left(\int_k^{k+1} \frac{dx}{(1+x)^2} \right)$ serisinin toplamını bulunuz.

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \left[-\frac{1}{1+x} \right]_k^{k+1} = \sum_{k=0}^{\infty} \left[-\frac{1}{1+k+1} + \frac{1}{k+1} \right] = \sum_{k=0}^{\infty} \left[\frac{1}{k+1} - \frac{1}{k+2} \right] \quad \text{Teleskopik seri}$$

$$S_k = \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{2} \right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3} \right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4} \right) + \dots + \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right) + \left(\frac{1}{k+1} - \frac{1}{k+2} \right) \\ = 1 - \frac{1}{k+2}$$

$$\lim_{k \rightarrow \infty} S_k = \lim_{k \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{k+2}\right) = 1$$

3) $\sum_{n=1}^{\infty} e^{-2n}$ serisinin toplamını bulunuz.

$$\sum_{n=1}^{\infty} e^{-2n} = \sum_{n=1}^{\infty} \underbrace{\frac{1}{e^2}}_a \underbrace{\left(\frac{1}{e^2}\right)}_r^{n-1} = \frac{\frac{1}{e^2}}{1 - \frac{1}{e^2}} = \frac{1}{e^2 - 1}$$

$$r = \frac{1}{e^2} \quad |r| = \frac{1}{e^2} < 1 \text{ yakınsak.}$$

4) Genel terimi $a_n = n - \frac{1}{2} \ln(1 + e^{2n})$ ($n=1, 2, \dots$) dizisinin limitini bulunuz.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[n - \frac{1}{2} \ln(1 + e^{2n}) \right] \stackrel{\infty - \infty}{=} \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\ln(e^n) - \frac{1}{2} \ln(1 + e^{2n}) \right] = \lim_{n \rightarrow \infty} \ln\left(\frac{e^n}{\sqrt{1 + e^{2n}}}\right)$$

$$= \ln \left[\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{e^n}{\sqrt{e^{2n}(e^{-2n} + 1)}} \right] = \ln \left[\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\cancel{e^n}}{\cancel{e^n} \sqrt{e^{-2n} + 1}} \right]$$

$$= \ln 1 = 0$$

5) $a_1 = 1$, $a_{n+1} = \frac{1+\ln n}{n} a_n$ ile verilen $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ serisinin karakterini belirleyiniz.

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{1+\ln n}{n} \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1+\ln n}{n} \stackrel{\frac{\infty}{\infty}}{=} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0 < 1 \text{ yakınsak.}$$

6) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{b^n x^n}{\ln n}$ serisinin yakınsaklık yarıçapının 3 olması için b ne olmalıdır?

$$R = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{b^n}{\ln n} \cdot \frac{\ln(n+1)}{b^{n+1}} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \left(\frac{\ln(n+1)}{\ln n} \cdot \frac{1}{b} \right) \right| = \frac{1}{|b|} = 3 \Rightarrow |b| = \frac{1}{3} \begin{cases} b = \frac{1}{3} \\ b = -\frac{1}{3} \end{cases}$$

7) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(3^{-n})}{1+3^n}$ serisinin karakterini belirleyiniz.

$$\frac{\sin(3^{-n})}{1+3^n} < \frac{\sin(3^{-n})}{3^n} < \frac{1}{3^n}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3} \left(\frac{1}{3} \right)^{n-1} \text{ geo. seri. } |r| = \frac{1}{3} < 1 \text{ yak. ve}$$

Verilen serinin her terimi geo. serinin her teriminden küçük olduğundan o da yakınsaktır.

8) $f(x) = \sum_{h=1}^{\infty} \frac{x^h}{(h-1)!}$ olduğuna göre

$x \cdot f'(x)$ 'i $f(x)$ cinsinden ifade ediniz.

$$f(x) = \sum_{h=1}^{\infty} \frac{x^h}{(h-1)!} = x + \frac{x^2}{1!} + \frac{x^3}{2!} + \frac{x^4}{3!} + \dots$$

$$f'(x) = \sum_{h=1}^{\infty} \frac{h \cdot x^{h-1}}{(h-1)!} = 1 + 2x + 3 \frac{x^2}{2!} + 4 \frac{x^3}{3!} + \dots$$

$$x \cdot f'(x) = \sum_{h=1}^{\infty} \frac{h \cdot x^h}{(h-1)!} = x + 2x^2 + \frac{3x^3}{2!} + \frac{4x^4}{3!} + \dots$$

$$n = k+1$$

$$\begin{aligned} x \cdot f'(x) &= \sum_{k=0}^{\infty} (k+1) \cdot \frac{x^{k+1}}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\cancel{k} \cdot x^{k+1}}{\underbrace{k!}_{\cancel{k} \cdot (k-1)!}} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{k+1}}{k!} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^{k+1}}{(k-1)!} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{(k-1)!} \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x \cdot x^k}{(k-1)!} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{(k-1)!} = (x+1) \cdot \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{(k-1)!} \\ &= (x+1) \cdot f(x) \end{aligned}$$

9) $g(x) = x \ln(1+x^2)$ ile tanımlı $g(x)$ fonksiyonunu temsil eden kuvvet serisini ve yakınsaklık aralığını bulunuz.

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n \quad |x| < 1$$

x yerine $-x^2$ yazalım; $\frac{1}{1+x^2} = \sum_{n=0}^{\infty} (-x^2)^n = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot x^{2n} \quad |x| < 1$

Eşitliğin her iki tarafını $2x$ ile çarpalım;

$$\frac{2x}{1+x^2} = \sum_{n=0}^{\infty} 2(-1)^n \cdot x^{2n+1}$$

$$\int_0^x \frac{2t}{1+t^2} dt = \sum_{n=0}^{\infty} 2(-1)^n \left(\int_0^x t^{2n+1} dt \right)$$

$$\ln(1+t^2) \Big|_0^x = \sum_{n=0}^{\infty} 2(-1)^n \left(\frac{t^{2n+2}}{2n+2} \Big|_0^x \right)$$

$$\ln(1+x^2) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{x^{2n+2}}{n+1}$$

$$x \cdot \ln(1+x^2) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{x^{2n+3}}{n+1} \quad |x| < 1$$

$x = -1 \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot (-1)^{2n+3}}{n+1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n+1}$ Alt-Harmonik seri şartlı yak.

$x = 1 \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot 1^{2n+3}}{n+1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}$ Alt-Har. Seri şartlı yak.

10) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n + (-2)^n}{n} (x+1)^n$ serisinin yakınsaklık aralığını bulunuz.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{3^{n+1} + (-2)^{n+1}}{n+1} \cdot (x+1)^{n+1} \cdot \frac{n}{[3^n + (-2)^n] (x+1)^n} \right|$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{n}{n+1} \cdot (x+1) \cdot \frac{3^{n+1} \cdot [1 + (-\frac{2}{3})^{n+1}]}{3^n [1 + (-\frac{2}{3})^n]} \right| = |x+1| \cdot 3 < 4 \Rightarrow |x+1| < \frac{1}{3}$$

$$\Rightarrow -\frac{1}{3} < x+1 < \frac{1}{3}$$

$$\Rightarrow -\frac{4}{3} < x < -\frac{2}{3}$$

$$x = -\frac{4}{3} \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n + (-2)^n}{n} \cdot \left(-\frac{1}{3}\right)^n \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n [1 + (-\frac{2}{3})^n]}{n} \cdot \frac{(-1)^n}{3^n}$$

$$= \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}}_{\text{Alt.Harm. serisi şartlı yak.}} + \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\frac{2}{3})^n}{n}}_{\substack{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{3} \cdot (\frac{2}{3})^{n-1} \text{ geo seri.} \\ |r| = \frac{2}{3} < 1 \text{ yak.}}}$$

$$\frac{1}{n} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^n < \left(\frac{2}{3}\right)^n \quad (\forall n \text{ için})$$

0 zaman $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \left(\frac{2}{3}\right)^n$ de yakınsaktır.

11) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\sqrt{n}+2}{\sqrt{n}+3} \right)^{\sqrt{n^3}}$ serisinin karakterini belirleyiniz.

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} &= \lim_{n \rightarrow \infty} n \sqrt{\left(\frac{\sqrt{n}+2}{\sqrt{n}+3} \right)^{\sqrt{n^3}}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{\sqrt{n}+2}{\sqrt{n}+3} \right)^{\frac{\sqrt{n^3}}{n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{\sqrt{n}+2+1-1}{\sqrt{n}+3} \right)^{\sqrt{n}} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{\sqrt{n}+3} \right)^{\sqrt{n}+3-3} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{\sqrt{n}+3} \right)^{\sqrt{n}+3} \cdot \left(1 - \frac{1}{\sqrt{n}+3} \right)^{-3} \\ &= \lim_{t \rightarrow \infty} \underbrace{\left(1 - \frac{1}{t} \right)^t}_{e^{-1}} \cdot \left(1 - \frac{1}{t} \right)^{-3} \\ &= e^{-1} \cdot 1 = \frac{1}{e} \end{aligned}$$

$$\left. \begin{array}{l} n \rightarrow \infty \\ \sqrt{n}+3 \rightarrow \infty \end{array} \right\} \sqrt{n}+3=t$$

12) $\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt[n^2]{2n+n^3}$ serisinin karakterini belirleyiniz.

$$a_n = (2n+n^3)^{1/n^2} \Rightarrow \ln a_n = \frac{1}{n^2} \ln(2n+n^3) \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \ln a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^2} \cdot \ln(2n+n^3) = 0 \cdot \infty$$

$$\ln(\lim_{n \rightarrow \infty} a_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln(2n+n^3)}{n^2}$$

$$\stackrel{\frac{\infty}{\infty}}{=} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2+3n^2}{2n+n^3}$$

$$\stackrel{L'H}{=} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2+3n^2}{2n}$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2+3n^2}{2n(2n+n^3)}$$

$$= 0$$

$$\ln(\lim_{n \rightarrow \infty} a_n) = 0 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = e^0 = 1 \neq 0$$

n.terim testine göre seri ıraksaktır.

13) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos k\pi}{\sqrt{k}}$ serisinin karakterini belirleyiniz.

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos k\pi}{\sqrt{k}} = \frac{-1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{3}} + \dots$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{\sqrt{k}} \quad \text{Alt. seri}$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left| \frac{(-1)^k}{\sqrt{k}} \right| = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{k}} \quad \text{p-serisi}$$

$p = \frac{1}{2} < 1$ ıraksak.

Alt. seri testi;

$$1^\circ) a_{k+1} \stackrel{?}{<} a_k \quad \forall k \text{ için} \quad k < k+1$$

$$\sqrt{k} < \sqrt{k+1}$$

$$\frac{1}{\sqrt{k}} > \frac{1}{\sqrt{k+1}} \quad \checkmark$$

$$2^\circ) \lim_{k \rightarrow \infty} a_k \stackrel{?}{=} 0 \quad \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{k}} = 0 \quad \checkmark$$

Alt. seri yakınsaktır. Mutlak değ. oluşan seri ıraksak olduğundan şartlı yakınsaktır.

14) $|x| < 1$ olmak üzere $\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n$ kuvvet serisinden yararlanarak

$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \cdot n \cdot (n+1) \cdot x^{n+1}$ serisinin toplamını ve bu toplamdan yararlanarak

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} \cdot n \cdot (n+1)}{2^{n+1}}$ serisinin yakınsadığı değeri bulunuz.

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n \quad |x| < 1$$

$$x \rightarrow -x \Rightarrow \frac{1}{1+x} = \sum_{n=0}^{\infty} (-x)^n \quad |x| < 1$$

$$x \text{ 'e göre türet ; } \frac{-1}{(1+x)^2} = \sum_{n=1}^{\infty} (-1) \cdot n \cdot (-x)^{n-1}$$

$$\text{Her iki tarafı } -x^2 \text{ ile çarp ; } \frac{x^2}{(1+x)^2} = \sum_{n=1}^{\infty} (-1) \cdot n \cdot (-x)^{n+1}$$

$$\text{Tekrar } x \text{ 'e göre türet ; } \frac{2x(1+x)^2 - 2(1+x) \cdot x^2}{(1+x)^4} = \sum_{n=1}^{\infty} n(n+1) (-x)^{n+1}$$

$$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \cdot n \cdot (n+1) \cdot x^{n+1} = \frac{2x + 2x^2 - 2x^2}{(1+x)^3} = \frac{2x}{(1+x)^3} \quad |x| < 1$$

$$x = \frac{1}{2} \in (-1, 1) \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} \cdot n \cdot (n+1)}{2^{n+1}} = \frac{2 \cdot \frac{1}{2}}{(1 + \frac{1}{2})^3} = \frac{8}{27}$$

- 15) $x=1$ noktasını içeren açık bir aralıkta, her mertebeden türeye sahip olan $f(x)$ fonksiyonunun ve bazı türevlerinin değerleri aşağıdaki gibidir.

x	$f(1)$	$f'(1)$	$f''(1)$	$f'''(1)$	$f^{(4)}(1)$
1	1	-1	1	-6	24

2. derece Taylor polinomu ile

Uygun değerleri kullanarak $f(1.3)$ 'ün değerini yaklaşık olarak hesaplayınız.

$$P_2(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + f''(x_0)(x-x_0)^2$$

$$x_0=1 \Rightarrow P_2(x) = f(1) + f'(1)(x-1) + f''(1)(x-1)^2$$

$$f(1.3) \approx P_2(1.3) = 1 + (-1)(1.3-1) + 1(1.3-1)^2 = 1 - (0.3) + 1 \cdot (0.3)^2 = 0.79$$

- 16) $\begin{cases} x=t^2 \\ y=1-t^2 \end{cases}$ parametrik denklemlerle verilen eğri'nin $-1 \leq t \leq 0$ arasındaki uzunluğunu veren integrali yazınız.

$$S = \int_{-1}^0 \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} dt = \int_{-1}^0 \sqrt{(2t)^2 + (-2t)^2} dt = \int_{-1}^0 2\sqrt{2} t dt$$

17) $\begin{cases} x = \sin t \\ y = \frac{2}{\sin t} \end{cases}$ parametrik denklemleri ile verilen eğriğin eğimi hangi t değeri için -1 olur?

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy/dt}{dx/dt} = \frac{\frac{-2\cos t}{\sin^2 t}}{\cos t} = \frac{-2}{\sin^2 t} = -1 \Rightarrow \begin{aligned} \sin^2 t &= 2 \\ \sin t &= \sqrt{2} \end{aligned}$$

$$= \frac{-2\cancel{\cos t}}{\sin^2 t} \cdot \frac{1}{\cancel{\cos t}}$$

?

$$x = -\frac{2}{3} \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n + (-2)^n}{n} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cancel{3^n} [1 + (-\frac{2}{3})^n]}{n} \cdot \frac{1}{\cancel{3^n}} = \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}}_{\text{Harmonik Seri ıraksak}} + \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-\frac{2}{3})^n}{n}}_{\text{yak.}} \rightarrow \text{ıraksak.}$$

Yakınsaklık aralığı $[-\frac{4}{3}, -\frac{2}{3})$

(yak. $|r| = |-\frac{2}{3}| < 1$ ile mukayese ettik)