**Ör/** $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{3n-2}\left(\frac{3x+1}{2x-1}\right)^n$ serisinin yakınsaklık aralığını bulunuz.

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{1}{3n+1}\cdot\left(\frac{3x+1}{2x-1}\right)^{n+1}\cdot(3n-2)\cdot\left(\frac{2x-1}{3x+1}\right)^n\right| = \left|\frac{3x+1}{2x-1}\right| < 1$$

$|3x+1| < |2x-1|$ ( Her iki tarafta pozitif olduğundan karesi alınabilir)

$\Rightarrow (3x+1)^2 < (2x-1)^2 \Rightarrow (3x+1)^2-(2x-1)^2 < 0 \Rightarrow (3x+1-2x+1)(3x+1+2x-1) < 0$

$\Rightarrow (x+2)\cdot 5x < 0$

$\Rightarrow -2 < x < 0$ için yak.

| | | $-2$ | | $0$ | |
|---|---|---|---|---|---|
| $x+2$ | $-$ | • | $+$ | | $+$ |
| $5x$ | $-$ | | $-$ | • | $+$ |
| | $+$ | | $-$ | | $+$ |

$-2$ ve $0$ için ayrıca incelemek gerekir.

**Kuvvet Serileri Üzerinde Cebirsel İşlemler**

$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ , $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n$ $\quad x-x_0=y \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} a_n y^n$

**Teorem:** $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ ve $\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$ serileri sırasıyla $R_a$ ve $R_b$ yakınsaklık yarıçapına sahip iki seri ve $(c\neq 0)$ herhangi bir sabit olsun. O zaman;

1°) $\sum a_n x^n$ serisinin yakınsadığı heryerde $\sum c a_n x^n$ serisi de yakınsaktır ve yakınsaklık yarıçapı yine $R_a$'dır.

$$\sum (c a_n)\cdot x^n = c.\sum a_n x^n$$

2°) $\sum_{n=0}^{\infty}(a_n+b_n)x^n$ serisinin yakınsaklık yarıçapı toplamda bulunan serilerin yakınsaklık yarıçaplarının en küçüğünden daha küçük olamaz.

$\sum_{n=0}^{\infty}(a_n+b_n)x^n \rightarrow$ yak. yarıçapı $R_{a+b}$ $\qquad R_{a+b} \geq \min(R_a, R_b)$

3°) $\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n\right) = (a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots)(b_0+b_1x+b_2x^2+\cdots)$

$$= \underbrace{a_0b_0}_{c_0} + \underbrace{(a_0b_1+b_0a_1)}_{c_1}x + \underbrace{(a_0b_2+a_1b_1+a_2b_0)}_{c_2}x^2 + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$$

$$c_n = \sum_{j=0}^{n} a_j \cdot b_{n-j}$$

$\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n\right) \rightarrow$ yakınsak. yarıçapı $R_{a.b} \Rightarrow \quad R_{a.b} \geq \min(R_a, R_b)$

4°) $\dfrac{\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n}{\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n} = \dfrac{a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots}{b_0+b_1x+b_2x^2+\cdots}$ Bölüm serisinin katsayılarını belirlemek için basit bir kural yoktur. Bölüm serisinin yakınsaklık yarıçapına $R_{\frac{a}{b}}$ dersek ve de $R_c$'de yakınsaklık merkezinden paydadaki serinin topla_

minin "0" olduğu en yakın kompleks sayıya olan uzaklık olmak üzere
$R_{\frac{a}{b}} \geq \min\{R_a, R_b, R_c\}$ 'dir.

Ör/ $\underbrace{\left(\sum_{n=0}^{\infty} x^n\right)}_{} \cdot \left(\sum_{n=0}^{\infty} x^n\right) = (1+x+x^2+x^3+\dots)(1+x+x^2+x^3+\dots) = \left(\frac{1}{1-x}\right)\left(\frac{1}{1-x}\right)$

$|x|<1$

$-1<x<1$

$\Rightarrow 1+2x+3x^2+4x^3 = \left(\frac{1}{1-x}\right)^2$

$\sum_{n=0}^{\infty} (n+1) \cdot x^n$ $\qquad C_n = \sum_{j=0}^{\infty} 1 = n+1$

$1 = 1+0.x+0.x^2+0.x^3+\dots$

$1-x = 1+(-1).x+0.x^2+0.x^3+\dots$

Ör/ $\frac{1}{1-x} = \frac{1+0.x+0.x^2+\dots}{1+(-1).x+0.x^2+\dots} = 1+x+x^2+x^3+\dots = \sum_{n=0}^{\infty} x^n$

yakınsaklık merk $= 0$

$$
\begin{array}{r|l}
1 & 1-x \\
\cline{2-2}
-\cancel{1}+x & 1+x+x^2+\dots \\
\hline
-\cancel{x}+x^2 & \\
\hline
x^2 &
\end{array}
$$

$R_a = \infty$

$R_b = \infty$

$R_c = 1$

$R_{\frac{a}{b}} \geq \min\{\infty, \infty, 1\} = 1$

## Kuvvet serilerinin türetilmesi ve integre edilmesi

Eğer bir kuvvet serisinin yakınsaklık yarıçapı pozitif ise seri terim terim türetilebilir ve integre edilebilir.

**Teorem:** $R>0$ olmak üzere eğer $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ serisi $(-R,R)$ aralığında $f(x)$ toplamına yakınsıyorsa yani

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots = f(x)$$ ise;

1°) $f(x)$, $(-R,R)$ aralığı üzerinde türevlenebilirdir ve

$$f'(x) = a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2 + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}$$

dir,

2°) $f(x)$, $(-R,R)$ aralığının her kapalı alt aralığı üzerinde integre edilebilirdir ve her $x \in (-R,R)$ için

$$\int_0^x f(t)\,dt = \int_0^x (a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + \cdots)\,dt = a_0 t + \frac{a_1}{2} t^2 + \frac{a_2}{3} t^3 + \cdots \Big|_0^x = a_0 x + \frac{a_1}{2} x^2 + \frac{a_2}{3} x^3 + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{x^{n+1}}{n+1}$$ dir.

Teoreme göre terim terim türetilmiş ya da integre edilmiş serilerin yakınsaklık yarıçapları verilen serilerle aynı olacaktır. Türevle elde edilmiş serinin yakınsaklık aralığı, orjinal seri kendi yakınsaklık aralığının uç noktalarında yakınsak olsa bile muhtemelen bu uç noktaların biri veya her ikisi dışında orjinal serinin yakınsaklık aralığı ile aynıdır.

İntegralle elde edilmiş serinin yakınsaklık aralığı, orjinal seri kendi yakınsaklık aralığının uç noktalarında yakınsak olmasa bile bu uç noktaların biri veya her ikisinde de yakınsak olacak şekilde orjinal seri ile aynı yakınsaklık aralığına sahiptir.

ÖRNEKLER

1°) $\ln(1+x)$'i kuvvet serisi toplamı olarak ifade ediniz.

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1+x+x^2+\cdots = \frac{1}{1-x}$$

$$\frac{1}{1+x} = \frac{1}{1-(-x)} = 1+(-x)+(-x)^2+\cdots = 1-x+x^2-\cdots = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \cdot x^n \qquad |x|<1 \Rightarrow -1<x<1$$

$$\int_0^x \frac{1}{1+t}\,dt = \int_0^x (1-t+t^2-\cdots)\,dt \Rightarrow \ln|1+t|\Big|_0^x = t-\frac{t^2}{2}+\frac{t^3}{3}-\cdots\Big|_0^x$$

$$\ln(1+x) = x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\cdots = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \cdot \frac{x^{n+1}}{n+1}$$

$$|x|<1 \Rightarrow -1<x\leq 1$$

$$x=-1 \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty}\frac{-1}{n+1}$$

$$x=1 \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n+1}$$

2°) $x+4x^2+9x^3+16x^4+\cdots$ kuvvet serisinin toplamını bulunuz ve bu toplamdan yararlanarak $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{2^n}$ serisinin yakınsadığı değeri bulunuz.

$$1+x+x^2+x^3+\cdots=\sum_{n=0}^{\infty}x^n=\frac{1}{1-x}\qquad |x|<1 \qquad -1<x<1$$

Her iki tarafı türetelim;

$$1+2x+3x^2+\cdots=\sum_{n=1}^{\infty}nx^{n-1}=\frac{1}{(1-x)^2}$$

x ile çarp;

$$x+2x^2+3x^3+\cdots=\sum_{n=1}^{\infty}n\,x^n=\frac{x}{(1-x)^2}$$

Tekrar türev alalım;

$$1+4x+9x^2+\cdots=\sum_{n=1}^{\infty}n^2x^{n-1}=\frac{(1-x)^2+2x(1-x)}{(1-x)^4}=\frac{1-x+2x}{(1-x)^3}=\frac{1+x}{(1-x)^3}$$

x ile çarp;

$$x+4x^2+9x^3+\cdots=\boxed{\sum_{n=1}^{\infty}n^2x^n}=\frac{x(1+x)}{(1-x)^3}=f(x)$$

$$\frac{1}{2}\in(-1,1)\Rightarrow x=\frac{1}{2}\text{ için }\sum_{n=1}^{\infty}n^2\cdot\frac{1}{2^n}=\frac{\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{2}\right)}{\left(1-\frac{1}{2}\right)^3}=\frac{\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}}{\left(\frac{1}{2}\right)^3}=\frac{3}{4}\cdot 8=6$$

- $1+x+x^2+\cdots=\sum_{n=0}^{\infty}x^n=\frac{1}{1-x}$
- $1-x+x^2-\cdots=\sum_{n=0}^{\infty}(-x)^n=\frac{1}{1+x}$
- $\ln(1+x)=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{n+1}}{n+1}$

Öd/ arctan x'in kuvvet seri açılımını bulunuz.