

# 1. Tam özfonksiyon genişlemesi

Bu yöntemde Green fonksiyonu

$$\Delta u + \lambda^2 u = 0 \quad (x,y) \in A$$

$$u = 0 \quad (x,y) \in \partial(A)$$

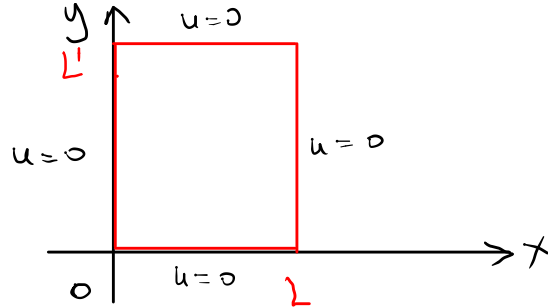
özdeğer probleminin  
ortogonal özfonk-  
siyonları açısından  
genişletilmesidir.

$A: 0 \leq x \leq L$  ve  $0 \leq y \leq L'$  şeklindeki bir dikdörtgen üzerinde iki boyutlu Laplace denkleminin Dirichlet problemi için Green fonksiyonunu bulalım.

$$\nabla^2 u + \lambda^2 u = 0 \quad (x,y) \in A$$

$$u = 0 \quad (x,y) \in \partial(A)$$

$$L: \nabla^2 + \lambda^2$$



$$u(0,y) = 0$$

$$u(0,L') = 0$$

$$u(L,y) = 0$$

$$u(L,L') = 0$$

$$\nabla^2 u + \lambda^2 u = 0 \Rightarrow \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \lambda^2 u = 0$$

$$u(x,y) = X(x)Y(y)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = X'(x)Y(y), \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = X''(x)Y(y), \quad \frac{\partial u}{\partial y} = X(x)Y'(y), \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = X(x)Y''(y)$$

$$\Rightarrow X''Y + XY'' + \lambda^2 XY = 0$$

$$Y(X'' + \lambda^2 X) = -XY''$$

$$\Rightarrow \frac{Y(X'' + \lambda^2 X)}{XX} = \frac{-XY''}{XY}$$

$$\Rightarrow \frac{X'' + \lambda^2 X}{X} = \frac{-Y''}{Y} = t$$

$$\begin{pmatrix} X \neq 0 \\ Y \neq 0 \end{pmatrix}$$

$$p) \quad x'' + \lambda^2 x = t x$$

$$x'' + (\lambda^2 - t)x = 0$$

$$\text{k.D: } r^2 + (\lambda^2 - t) = 0$$

$$r^2 = -(\lambda^2 - t)$$

$$r_{1,2} = \pm \sqrt{\lambda^2 - t} i$$

$$\underline{x(x) = C_1 \cos \sqrt{\lambda^2 - t} x + C_2 \sin \sqrt{\lambda^2 - t} x}$$

$$x(0) = 0 \Rightarrow C_1 = 0$$

$$x(L) = 0 \Rightarrow C_2 \sin \sqrt{\lambda^2 - t} L = 0$$

$$\Rightarrow \sin \sqrt{\lambda^2 - t} L = 0$$

$$\sqrt{\lambda^2 - t} L = n\pi \quad (n=0, \pm 1, \pm 2, \dots)$$

$$\sqrt{\lambda^2 - t} = \frac{n\pi}{L}$$

$$\lambda^2 - t = \frac{n^2 \pi^2}{L^2} \Rightarrow \boxed{x(x) = C_2 \sin \frac{n\pi x}{L}}$$

$$2) \quad -y'' = ty \Rightarrow y'' + ty = 0$$

$$r^2 + t = 0 \Rightarrow r_{1,2} = \pm \sqrt{t} i$$

$$\underline{y(y) = C_3 \cos \sqrt{t} y + C_4 \sin \sqrt{t} y}$$

$$y(0) = 0 \Rightarrow C_3 = 0$$

$$y(L) = 0 \Rightarrow C_4 \sin \sqrt{t} L = 0$$

$$\Rightarrow \sin \sqrt{t} L = 0$$

$$\sqrt{t} L = m\pi \quad m=0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

$$t = \frac{m^2 \pi^2}{L^2}$$

$$\Rightarrow \boxed{y(y) = C_4 \cdot \sin \frac{m\pi y}{L}}$$

$$\left. \begin{aligned} \lambda^2 - k &= \frac{n^2 \pi^2}{L^2} \\ k &= \frac{m^2 \pi^2}{L'^2} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \boxed{\lambda^2 = \frac{n^2 \pi^2}{L^2} + \frac{m^2 \pi^2}{L'^2}} \quad \text{özdeğerler}$$

$$\sin^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2}$$

$$\cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2}$$

$$u(x,y) = X(x) \cdot Y(y) = C_2 \sin \frac{n\pi x}{L} C_4 \sin \frac{m\pi y}{L'} = C_{mn} \sin \frac{n\pi x}{L} \sin \frac{m\pi y}{L'} = C_{mn} u_{mn}$$

$$\begin{aligned} \left\| \sin \frac{n\pi x}{L} \right\| &= \left[ \int_0^L \left( \sin \frac{n\pi x}{L} \right)^2 dx \right]^{1/2} = \left[ \int_0^L \frac{1 - \cos \frac{2n\pi x}{L}}{2} dx \right]^{1/2} = \left[ \int_0^L \frac{dx}{2} - \int_0^L \frac{1}{2} \cos \frac{2n\pi x}{L} dx \right]^{1/2} \\ &= \left[ \frac{x}{2} \Big|_0^L - \frac{1}{2} \cdot \frac{L}{2n\pi} \sin \frac{2n\pi x}{L} \Big|_0^L \right]^{1/2} \\ &= \left[ \left( \frac{L}{2} - 0 \right) - \frac{L}{4n\pi} (\sin 2n\pi - \sin 0) \right]^{1/2} = \sqrt{\frac{L}{2}} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \left\| \sin \frac{m\pi y}{L'} \right\| = \sqrt{\frac{L'}{2}}$$

$$\Rightarrow \boxed{u_{mn}(x,y) = \frac{2}{\sqrt{LL'}} \sin \frac{n\pi x}{L} \sin \frac{m\pi y}{L'}} \quad \text{öz fonksiyonlar.}$$

$$n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

$$Ly: \frac{d}{dx} \left[ p(x) \frac{dy}{dx} \right] + q(x)y = F(x) \quad \alpha \leq x \leq \beta$$

şeklinde verilen  $L$  operatörünün özdeğerlerini  $\lambda$  ile özfonksiyonlarını da  $\varphi(x)$  ile gösterirsek;

$$L\varphi_n(x) = \lambda_n \varphi_n(x)$$

$$y(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[ a_n \cos \frac{n\pi x}{L} + b_n \sin \frac{n\pi x}{L} \right]$$

denklemi sağlanır. Bu özfonksiyonlar,  $\delta_{nm}$  kronecker deltası olmak üzere

$$\int_{\alpha}^{\beta} \overline{\varphi_n(x)} \cdot \varphi_m(x) dx = \delta_{nm} = \begin{cases} 1 & m=n \\ 0 & m \neq n \end{cases}$$

diklik şartını ve

$$\int_{\alpha}^{\beta} \overline{\varphi_n(x)} \cdot \varphi_n(x) dx = 1$$

tamlik ilişkisini sağlarlar. Sonuç olarak  $x \in [\alpha, \beta]$  için  $y(x)$  ve  $F(x)$  fonksiyonları  $\{\varphi_n(x)\}$  ortonormal özfonksiyon cinsinden

$$y(x) = \sum_n a_n \varphi_n(x) \quad \text{ve}$$

$$a_n = \int_{\alpha}^{\beta} y(x) \cdot \varphi_n(x) dx$$

$$F(x) = \sum_n b_n \varphi_n(x) \quad \text{şeklinde elde edilir.}$$

$$b_n = \int_{\alpha}^{\beta} F(x) \cdot \varphi_n(x) dx$$

$$y(x) = \sum_n^{\infty} a_n \varphi_n(x)$$

$$Ly = L\left(\sum_n^{\infty} a_n \varphi_n(x)\right) = \sum_n^{\infty} a_n L\varphi_n = \sum_n^{\infty} a_n \lambda \varphi_n$$

$$Ly = F(x) \Rightarrow \sum_n^{\infty} a_n \lambda \varphi_n = \sum_n^{\infty} b_n \varphi_n \Rightarrow \sum_n^{\infty} (a_n \lambda - b_n) \varphi_n = 0$$

$$\Rightarrow a_n \lambda - b_n = 0 \Rightarrow a_n = \frac{b_n}{\lambda_n}$$

$$y(x) = \sum_n^{\infty} \frac{b_n \varphi_n}{\lambda_n} = \int \underbrace{\sum_n^{\infty} \frac{\varphi_n(T) \varphi_n(x)}{\lambda_n}}_{G(x; T)} F(T) dT$$

↗ birbirinden bağımsız  
dik fonk.

$G(x,y;X,Y)$  Green fonksiyonunun özfonksiyon genişlemesi

$$G(x,y;X,Y) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} C_{mn} U_{mn}(x,y) \quad (5)$$

dir. Bu gösterilim  $G(x,y;X,Y)$ 'nin dikdörtgenin kenarlarında sıfır olduğu koşulu sağlar.  $C_{mn}$  katsayılarını hesaplamak için 5'i 2(a)'da yerine yazalım.

$$\nabla^2 G = \nabla^2 \left[ \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} C_{mn} U_{mn}(x,y) \right] = \delta(x-X, y-Y) \quad \int_0^L \int_0^L U_{mn} \cdot U_{mn} dx dy = \begin{cases} 1 & m=n \\ 0 & m \neq n \end{cases}$$

$$\Rightarrow \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} C_{mn} \nabla^2 U_{mn}(x,y) = \delta(x-X, y-Y)$$

$$\Rightarrow \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} C_{mn} \left[ -\lambda^2 U_{mn}(x,y) \right] = \delta(x-X, y-Y)$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} C_{mn} \left( -\frac{n^2 \pi^2}{L^2} - \frac{m^2 \pi^2}{L^2} \right) U_{mn}(x,y) &= \delta(x-X, y-Y) \\ &= \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^L \int_0^L U_{mn}(x,y) \cdot U_{mn}(x,y) \delta(x-X, y-Y) dy dx \\ &= \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \left( \int_0^L \int_0^L \delta(x-X) \delta(y-Y) U_{mn}(x,y) dy dx \right) \cdot U_{mn}(x,y) \\ &= \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \delta(x-X) \delta(y-Y) U_{mn}(x,y) \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} C_{mn} \left( -\frac{n^2 \pi^2}{L^2} - \frac{m^2 \pi^2}{L'^2} \right) u_{mn}(x,y) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} u_{mn}(X,Y) u_{mn}(x,y)$$

$$\Rightarrow C_{mn} \left( -\frac{n^2 \pi^2}{L^2} - \frac{m^2 \pi^2}{L'^2} \right) = u_{mn}(X,Y) \Rightarrow C_{mn} = \frac{u_{mn}(X,Y)}{-\frac{n^2 \pi^2}{L^2} - \frac{m^2 \pi^2}{L'^2}}$$

$$G(x,y; X,Y) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} C_{mn} u_{mn}(x,y) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{-\frac{n^2 \pi^2}{L^2} - \frac{m^2 \pi^2}{L'^2}} \cdot u_{mn}(X,Y) \cdot u_{mn}(x,y)$$

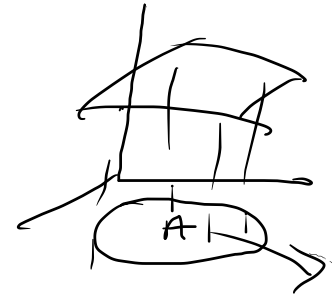
$$= -\frac{4}{LL'} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\underbrace{\frac{n^2 \pi^2}{L^2} + \frac{m^2 \pi^2}{L'^2}}_{\lambda_{mn}^2}} \cdot \sin \frac{n\pi X}{L} \sin \frac{m\pi Y}{L'} \cdot \sin \frac{n\pi x}{L} \sin \frac{m\pi y}{L'}$$

$$\left. \begin{array}{l} \nabla^2 u = F(x,y) \quad (x,y) \in A \\ u(x,y) = K(x,y) \quad (x,y) \in \beta(A) \end{array} \right\} \text{Dirichlet problemi ile ilişkili olan} \quad \begin{array}{l} \nabla^2 u + \lambda^2 u = 0 \quad (x,y) \in A \\ u = 0 \quad (x,y) \in \beta(A) \end{array}$$

özdeğer probleminin ortonormal özfonksiyonları  $u_{mn}(x,y)$  olduğunda

Green fonksiyonu için tam özfonksiyon genişlemesi

$$G(x,y; X,Y) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{U_{mn}(X,Y) \cdot U_{mn}(x,y)}{-\lambda_{mn}^2}$$



şeklinde genel bir formül olarak bulunabilir. Ancak bu tür genişlemeler sınırlı hesaplamada fayda sağlar. Öncelikle, sadece özdeğer problemi ayrılabilir olduğunda mümkündür ve bu bölgenin (A'nın) sınırının koordinat eğrilerinden oluşmasını gerektirir. (Üç boyutlu problemlerde koordinat yüzeylerinden oluşmasını gerektirir)

$$u = \underbrace{X(x)}_X \underbrace{Y(y)}_Y \rightarrow U = a_n(y) f_n(x)$$

$$G = \sum a_n f_n$$

## 2. Kısmi Özfonksiyon Genişlemesi

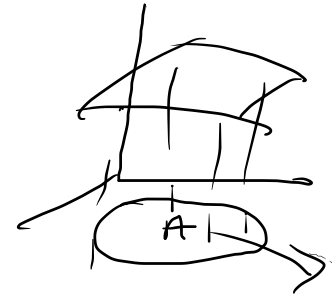
Tam özfonksiyon genişlemesinde olduğu gibi bu yöntemde de bölge (A) koordinat eğrileri ile sınırlı olmalıdır. Ancak bu yöntem tam özfonksiyon genişlemesi ile ayrışmanın homojen problem üzerinde ele alınması ve tek bir değişken kalana kadar yürütülmesi bakımından farklılık gösterir.

Bu yöntemde Green fonksiyonu için bir özfonksiyon genişlemesi, kalan değişkenin fonksiyonları olan katsayılarla önceden belirlenmiş normalize edilmiş özfonksiyonlara bağlı olarak bulunur.



Green fonksiyonu için tam özfonksiyon genişlemesi

$$G(x,y; X,Y) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{U_{mn}(X,Y) \cdot U_{mn}(x,y)}{-\lambda_{mn}^2}$$



şeklinde genel bir formül olarak bulunabilir. Ancak bu tür genişlemeler sınırlı hesaplamada fayda sağlar. Öncelikle, sadece özdeğer problemi ayrılabilir olduğunda mümkündür ve bu bölgenin (A'nın) sınırının koordinat eğrilerinden oluşmasını gerektirir. (Üç boyutlu problemlerde koordinat yüzeylerinden oluşmasını gerektirir)

$$u = \underbrace{X(x)}_X \underbrace{Y(y)}_Y \rightarrow U = a_n(y) f_n(x)$$

$$G = \sum a_n f_n$$

## 2. Kısmi Özfonksiyon Genişlemesi

Tam özfonksiyon genişlemesinde olduğu gibi bu yöntemde de bölge (A) koordinat eğrileri ile sınırlı olmalıdır. Ancak bu yöntem tam özfonksiyon genişlemesi ile ayrışmanın homojen problem üzerinde ele alınması ve tek bir değişken kalana kadar yürütülmesi bakımından farklılık gösterir.

Bu yöntemde Green fonksiyonu için bir özfonksiyon genişlemesi, kalan değişkenin fonksiyonları olan katsayılarla önceden belirlenmiş normalize edilmiş özfonksiyonlara bağlı olarak bulunur.

$$\hat{0} \nabla^2 u + \lambda^2 u = 0$$

$$\nabla^2 u = -\lambda^2 u$$

$$(x, y) \in A$$

$$(x, y) \in \partial(A)$$

$$A: 0 \leq x \leq L, 0 \leq y \leq L'$$

$$u(x, y) = \underbrace{\chi(x)} \gamma(y)$$

$$\nabla^2 f = -\lambda^2 f$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} &= \chi'' \gamma \\ \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} &= \chi \gamma'' \end{aligned} \right\} \Rightarrow 1^\circ) \chi'' + \lambda^2 \chi = t \chi$$

$$2^\circ) -\gamma'' = t \gamma$$

$$\gamma(y) = C_4 \sin \frac{n\pi y}{L'}$$

$$r^2 + (\lambda^2 - t) = 0$$

$$r_{1,2} = \sqrt{(\lambda^2 - t)} i$$

ortogonal

özfonk.

$$\chi(x) = C_2 \sin \frac{n\pi x}{L}$$

$$f_n(x) = \sqrt{\frac{2}{L}} \sin \frac{n\pi x}{L}$$

$$\Rightarrow \text{Buna göre } G(x, y; X, Y) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n(y) \cdot f_n(x)$$

$$y = C_1 \cos \sqrt{(\lambda^2 - t)} x + C_2 \sin \sqrt{(\lambda^2 - t)} x$$

$$\lambda^2 = -\frac{n^2 \pi^2}{L^2}$$

$$\chi(0) = 0$$

$$\chi(L) = 0$$

şeklinde yazalım. Burada  $a_n(y)$  katsayıları aslında  $\chi$  ve  $\gamma$ 'nin fonksiyonlarıdır. Ancak bu bağımlılığı açıkça ifade etmek yerine kapalı olarak ele alacağız.  $a_n(y)$ 'yi bulmak için  $G(x, y; X, Y)$ 'yi  $\nabla^2 G = \delta(x-X, y-Y)$ 'de yerine yazalım.

$$\begin{aligned}
\nabla^2 G &= \frac{\partial^2 G}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 G}{\partial y^2} \\
&= \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left[ \sum_{n=1}^{\infty} a_n(y) \cdot f_n(x) \right] + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \left[ \sum_{n=1}^{\infty} a_n(y) \cdot f_n(x) \right] \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} a_n(y) \cdot \frac{\partial^2 f_n(x)}{\partial x^2} + \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) \cdot \frac{d^2 a_n(y)}{dy^2} \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} a_n(y) \cdot \left( -\frac{n^2 \pi^2}{L^2} \right) \cdot f_n(x) + \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) \cdot \frac{d^2 a_n(y)}{dy^2} \quad (*)
\end{aligned}$$

$$\int_0^L f_n \cdot f_n = 1$$

$Ly = \lambda y$

$$\delta(x-\bar{x}, y-\bar{y}) = \sum_{n=1}^{\infty} \left[ \underbrace{\int_0^L \delta(x-\bar{x}, y-\bar{y}) \cdot f_n(x) dx}_{\delta(x-\bar{x}) \delta(y-\bar{y})} \right] f_n(x)$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} f_n(\bar{x}) \cdot \delta(y-\bar{y}) \cdot f_n(x) \quad (**)$$

$$\nabla^2 G = \delta(x-\bar{x}, y-\bar{y}) \Rightarrow (*) \text{ ve } (**) \text{ dan}$$

$$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n(y) \cdot \left(-\frac{n^2 \pi^2}{L^2}\right) f_n(x) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{d^2 a_n(y)}{dy^2} f_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) \delta(y-\gamma) f_n(x)$$

$$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \left[ -\left(\frac{n^2 \pi^2}{L^2}\right) a_n(y) + \frac{d^2 a_n(y)}{dy^2} \right] f_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \left[ f_n(x) \delta(y-\gamma) \right] f_n(x)$$

$$\Rightarrow \left. \begin{aligned} \frac{d^2 a_n(y)}{dy^2} - \frac{n^2 \pi^2}{L^2} a_n(y) &= f_n(x) \delta(y-\gamma) & 0 < y < L' \\ a_n(0) &= 0 & a_n(L') &= 0 \end{aligned} \right\}$$

$$\text{L.D: } r^2 - \frac{n^2 \pi^2}{L^2} = 0 \Rightarrow r = \pm \frac{n\pi}{L} \Rightarrow a_n(y) = \begin{cases} A e^{\frac{-n\pi y}{L}} + B e^{\frac{n\pi y}{L}} & 0 \leq y < T \\ C e^{\frac{-n\pi y}{L}} + D e^{\frac{n\pi y}{L}} & T < y \leq L' \end{cases}$$

$$a_n(0) = 0 \Rightarrow A e^0 + B e^0 = 0 \Rightarrow A + B = 0 \Rightarrow A = -B$$

$$a_n(L') = 0 \Rightarrow C e^{\frac{-n\pi L'}{L}} + D e^{\frac{n\pi L'}{L}} = 0 \Rightarrow D = -C e^{\frac{-n\pi L'}{L}} e^{\frac{n\pi L'}{L}}$$

$$a_n(y) = \begin{cases} A e^{-\frac{n\pi y}{L}} + B e^{\frac{n\pi y}{L}} & 0 \leq y < T \\ C e^{-\frac{n\pi y}{L}} + D e^{\frac{n\pi y}{L}} & T < y \leq L' \end{cases}$$

$$\begin{aligned} & e^{-\frac{n\pi y}{L}} - e^{-\frac{n\pi L'}{L}} \cdot e^{-\frac{n\pi L'}{L}} \cdot e^{\frac{n\pi y}{L}} \\ & e^{-\frac{n\pi L'}{L}} \left[ e^{\frac{n\pi L'}{L}} \cdot e^{-\frac{n\pi y}{L}} - e^{-\frac{n\pi L'}{L}} \cdot e^{\frac{n\pi y}{L}} \right] \\ & \underbrace{\qquad\qquad\qquad}_{e^{\frac{n\pi}{L}(L'-y)} - e^{-\frac{n\pi}{L}(L'-y)}} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow a_n(y) = \begin{cases} -B e^{-\frac{n\pi y}{L}} + B e^{\frac{n\pi y}{L}} & 0 \leq y < T \\ C e^{-\frac{n\pi y}{L}} - C e^{-\frac{n\pi L'}{L}} \cdot e^{-\frac{n\pi L'}{L}} \cdot e^{\frac{n\pi y}{L}} & T < y \leq L' \end{cases}$$

$$= \begin{cases} -B \left( e^{-\frac{n\pi y}{L}} - e^{\frac{n\pi y}{L}} \right) & 0 \leq y < T \\ -C e^{-\frac{n\pi L'}{L}} \left[ e^{\frac{n\pi}{L}(L'-y)} - e^{-\frac{n\pi}{L}(L'-y)} \right] & T < y \leq L' \end{cases}$$

$$B = +\frac{1}{2}, \quad C = -\frac{1}{2} e^{\frac{n\pi L'}{L}} \text{ olaraka seçersek}$$

$$a_n(y) = \begin{cases} \frac{e^{\frac{n\pi y}{L}} - e^{-\frac{n\pi y}{L}}}{2} & 0 \leq y < T \\ \frac{e^{\frac{n\pi}{L}(L'-y)} - e^{-\frac{n\pi}{L}(L'-y)}}{2} & T < y \leq L' \end{cases}$$

$$= \begin{cases} \sinh \frac{n\pi y}{L} & 0 \leq y < T \\ \sinh \frac{n\pi (L'-y)}{L} & T < y \leq L' \end{cases}$$

