Sabit katsayılı İkinci Taraflı Lineer Denklemler
(Homojen olmayan)

$$a_0 y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1} y' + a_n y = f(x) \qquad (1)$$

$$a_0 y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1} y' + a_n y = 0 \qquad (2)$$

$y_h = c_1 y_1 + c_2 y_2 + \cdots + c_n y_n \rightarrow$ (2) denkleminin genel çözümü

$y_ö \rightarrow$ (1) denkleminin bir özel çözüm.

(1)'in genel çözümü $y = y_h + y_ö$

$y_ö$'in bulunmasında farklı yöntemler vardır.

1°) Belirsiz Katsayılar Yöntemi

2°) Sabitlerin (Parametrelerin) Değişimi Yöntemi

3°) Operatör Yöntemi

BELİRSİZ KATSAYILAR YÖNTEMİ

Bu yöntemde esas olan ikinci taraftaki $f(x)$ fonksiyonunun ne olduğudur. $f(x)$'in durumuna göre bir çözüm önerilir ve gerekli türevler alınarak dif. denklemde yazılmak suretiyle $f(x)$'e eşitlenir. Karşılıklı terimler eşitlenerek bilinmeyen katsayılar hesaplanır ve istenen çözüm belirlenir.

1°) $f(x)$ bir n. dereceden polinom ise;

a) Eğer karakteristik denklemin kökleri sıfırdan farklı ise o zaman

$y_{ö} = f(x)$ ile aynı dereceden bir polinom olarak önerilir. Türevler alınır, denklemde yerine yazılarak karşılıklı katsayılar eşitlenmek suretiyle $y_{ö}$ belirlenir.

b) Eğer $r=0$ karakteristik denklemin p katlı kökü ise o zaman

$$y_{ö} = x^{p} \cdot (f(x) \text{ ile aynı dereceden bir polinom})$$

olarak önerilir. Türevler alınır denklemde yerine yazılarak karşılıklı katsayılar eşitlenmek suretiyle $y_{ö}$ belirlenir.

Ör/ $y''+2y'-3y=3x^2-x+5$ denkleminin genel çözümünü bulunuz.

$D^2y+2Dy-3y=3x^2-x+5$ $\quad r_1\neq 0,\ r_2\neq 0$

$L(r)=r^2+2r-3=0$

$(r+3)(r-1)=0$

$r_1=-3 \quad r_2=1$

$y_h=c_1e^{-3x}+c_2e^{x}$

$$\left.\begin{aligned} y_ö &= ax^2+bx+c \\ y_ö' &= 2ax+b \\ y_ö'' &= 2a \end{aligned}\right\} \Rightarrow 2a+2[2ax+b]-3[ax^2+bx+c]\equiv 3x^2-x+5$$

$$-3ax^2+(4a-3b)x+(2a+2b-3c)\equiv 3x^2-x+5$$

$$\left.\begin{aligned} -3a=3 &\Rightarrow a=-1 \\ 4a-3b=-1 &\Rightarrow b=-1 \\ 2a+2b-3c=5 &\Rightarrow c=-3 \end{aligned}\right\} \Rightarrow y_ö=-x^2-x-3$$

$$y_{G.Ç}=y_h+y_ö=c_1e^{-3x}+c_2e^{x}-x^2-x-3$$

Ör/ $y'''+2y''=4t+6$ dif. denkleminin genel çözümünü bulunuz.

$(D^3+2D^2)y=4t+6$

$$\left.\begin{aligned} L(r) &= r^3+2r^2=0 \\ & r^2(r+2)=0 \\ & r_{1,2}=0 \quad r_3=-2 \end{aligned}\right\} y_h=c_1+c_2t+c_3e^{-2t}$$

$$\left.\begin{aligned} y_ö &= t^2\cdot(at+b)=at^3+bt^2 \\ y_ö' &= 3at^2+2bt \\ y_ö'' &= 6at+2b \\ y_ö''' &= 6a \end{aligned}\right\} \Rightarrow 6a+2(6at+2b)\equiv 4t+6$$

$12at+(6a+4b)\equiv 4t+6$

$12a=4 \Rightarrow a=1/3$

$6a+4b=6 \Rightarrow b=1$

Ör $y^{(4)} - y' = t^2$ dif. denk'nin genel çözümünü bulunuz.

$$(D^4 - D)y = t^2$$

$$L(r) = r^4 - r = 0$$

$$r(r^3 - 1) = 0$$

$$r(r-1)(r^2+r+1) = 0$$

$$r_1 = 0 \quad r_2 = 1 \quad r_{3,4} = \frac{-1 \mp \sqrt{1-4}}{2} = \frac{-1}{2} \mp \frac{\sqrt{3}i}{2}$$

$$y_h = c_1 + c_2 e^t + e^{-\frac{t}{2}}\left(c_3 \cos \frac{\sqrt{3}}{2}t + c_4 \sin \frac{\sqrt{3}}{2}t\right)$$

$$y_ö = t.(at^2+bt+c) = at^3 + bt^2 + ct$$

$$y_ö' = 3at^2 + 2bt + c$$

$$y_ö'' = 6at + 2b$$

$$y_ö''' = 6a$$

$$y^{(4)} = 0$$

$$0 - (3at^2 + 2bt + c) \equiv t^2$$

$$-3a = 1 \Rightarrow a = -1/3$$

$$2b = 0 \Rightarrow b = 0$$

$$c = 0 \Rightarrow c = 0$$

$$y_ö = -\frac{t^3}{3}$$

$$y_{G.Ç} = y_h + y_ö = c_1 + c_2 e^t + e^{-\frac{t}{2}}\left(c_3 \cos \frac{\sqrt{3}}{2}t + c_4 \sin \frac{\sqrt{3}}{2}t\right) - \frac{t^3}{3}$$

2°) $f(x) = M.e^{\alpha x}$ şeklinde üstel bir fonksiyon ise $(M \in \mathbb{R})$

1°) α karakteristik denklemin kökü değilse o zaman

$$y_ö = A.e^{\alpha x}$$

şeklinde önerilir. Türevler alınır. Dif. denklemde yerine yazılarak katsayı hesaplanır ve $y_ö$ belirlenir.

2°) α karakteristik denklemin p katlı kökü ise o zaman

$$y_ö = A.x^p.e^{\alpha x}$$

şeklinde önerilir. Türevler alınır. Dif. denklemde yerine yazılarak katsayı hesaplanır ve $y_ö$ belirlenir.

Ör 4/ $y'' - y' - 2y = 2e^{-t}$ dif. denkleminin genel çözümünü bulunuz.

$(D^2 - D - 2)\, y = 2e^{-t}$ $\quad \alpha = -1$

$L(r) = r^2 - r - 2 = 0$

$(r-2)(r+1) = 0$

$\underline{\underline{r_1 = -1}}, \; r_2 = 2$

$y_h = c_1 e^{-t} + c_2 e^{2t}$

$$\left.\begin{aligned} y_ö &= A.t.e^{-t} \\ y_ö' &= Ae^{-t} - Ate^{-t} \\ y_ö'' &= -Ae^{-t} - Ae^{-t} + Ate^{-t} \\ &= -2Ae^{-t} + Ate^{-t} \end{aligned}\right\}$$

$$\Rightarrow -2Ae^{-t} + \cancel{Ate^{-t}} - (Ae^{-t} - \cancel{Ate^{-t}}) - \cancel{2Ate^{-t}} = 2e^{-t}$$

$$-3Ae^{-t} = 2e^{-t} \Rightarrow -3A = 2$$

$$A = -\frac{2}{3} \Rightarrow y_{\ddot{o}} = -\frac{2t}{3} e^{-t}$$

$$y_{G.Ç} = y_h + y_{\ddot{o}} = c_1 e^{-t} + c_2 e^{2t} - \frac{2t}{3} e^{-t}$$

Ör/ $y'' + 5y' + 6y = e^{3t}$ dif. denkleminin genel çözümünü bulunuz.

$\alpha = 3$

$$(D^2 + 5D + 6)y = e^{3t}$$

$$L(r) = r^2 + 5r + 6 = 0$$

$$(r+2)(r+3) = 0$$

$$r_1 = -2 \quad r_2 = -3$$

$$y_h = c_1 e^{-2t} + c_2 e^{-3t}$$

$$\left.\begin{aligned} y_{\ddot{o}} &= A.e^{3t} \\ y_{\ddot{o}}' &= 3Ae^{3t} \\ y_{\ddot{o}}'' &= 9Ae^{3t} \end{aligned}\right\} \quad 9Ae^{3t} + 15Ae^{3t} + 6Ae^{3t} = e^{3t}$$

$$30Ae^{3t} = e^{3t} \Rightarrow 30A = 1 \Rightarrow A = \frac{1}{30}$$

$$y_{\ddot{o}} = \frac{e^{3t}}{30}$$

$$y_{GÇ} = y_h + y_{\ddot{o}} = c_1 e^{-2t} + c_2 e^{-3t} + \frac{e^{3t}}{30}$$

Ör/ $y'' - a^2 y = e^{at}$ dif. denkleminin genel çözümünü bulunuz.

$(D^2 - a^2)y = e^{at}$ $\quad \alpha = a$

$L(r) = r^2 - a^2 = 0$

$r^2 = a^2$

$r = \mp a$

$y_h = c_1 e^{at} + c_2 e^{-at}$

$y_{\ddot{o}} = Ate^{at}$

$y_{\ddot{o}}' = Ae^{at} + aAte^{at}$

$y_{\ddot{o}}'' = aAe^{at} + aAe^{at} + a^2Ate^{at}$

$= 2aAe^{at} + a^2Ate^{at}$

$2aAe^{at} + \cancel{a^2Ate^{at}} - \cancel{a^2Ate^{at}} = e^{at}$

$2aA = 1 \Rightarrow A = \dfrac{1}{2a}$

$\Rightarrow y_{\ddot{o}} = \dfrac{t}{2a} e^{at}$

$y_{G.Ç} = y_h + y_{\ddot{o}} = c_1 e^{at} + c_2 e^{-at} + \dfrac{t}{2a} e^{at}$

3°) $f(x)$ $M.\cos\beta x + N.\sin\beta x$ şeklinde ise;

1°) $\mp \beta i$ karakteristik denklemin kökü değilse o zaman

$y_{\ddot{o}} = A.\cos\beta x + B.\sin\beta x$

şeklinde önerilir. Türevler alınır. Denklemde yerine yazılarak A, B katsayıları bulunmak suretiyle $y_{\ddot{o}}$ belirlenir.

2°) $\mp \beta i$ karakteristik denklemin p katlı kökü ise o zaman

$$y_ö = x^p \left(A\cos\beta x + B\sin\beta x\right)$$

şeklinde önerilir. Türevler alınır. Denklemde yerine yazılarak A, B katsayıları bulunmak suretiyle $y_ö$ belirlenir.

Ör/ $y'' + 4y = 3\sin 2t$ dif. denkleminin genel çözümünü bulunuz.

$(D^2+4)y = 3\sin 2t$ $\qquad \beta = 2$

$L(r) = r^2 + 4 = 0$

$r_{1,2} = \mp 2i$

$y_h = c_1\cos 2t + c_2\sin 2t$

$y_ö = t\cdot(A\sin 2t + B\cos 2t)$

$y_ö' = (A\sin 2t + B\cos 2t) + t(2A\cos 2t - 2B\sin 2t)$

$y_ö'' = (2A\cos 2t - 2B\sin 2t) + (2A\cos 2t - 2B\sin 2t) + t(-4A\sin 2t - 4B\cos 2t)$

$= (4A\cos 2t - 4B\sin 2t) - 4t(A\sin 2t + B\cos 2t)$

$\Rightarrow 4A\cos 2t - 4B\sin 2t - \cancel{4t(A\sin 2t + B\cos 2t)} + \cancel{4t(A\sin 2t + B\cos 2t)} = 3\sin 2t$

$\Rightarrow 4A\cos 2t - 4B\sin 2t = 3\sin 2t \Rightarrow \begin{array}{l} 4A = 0 \Rightarrow A = 0 \\ -4B = 3 \Rightarrow B = \frac{-3}{4} \end{array}$

$y_{ö} = -\frac{3}{4} t \cos 2t$

$y_{G.Ç} = y_h + y_{ö} = c_1 \cos 2t + c_2 \sin 2t - \frac{3}{4} t \cos 2t$

Ör/ $y''' - 2y'' - y' + 2y = \sin t$ denkleminin genel çözümünü bulunuz.

$(D^3 - 2D^2 - D + 2)\, y = \sin t$ $\qquad \beta = 1$

$L(r) = r^3 - 2r^2 - r + 2 = 0$

$r^2(r-2) - (r-2) = 0$

$(r-2)\,(r^2-1) = 0$

$r_1 = 2 \quad r_2 = 1 \quad r_3 = -1$

$y_h = c_1 e^{2t} + c_2 e^{t} + c_3 e^{-t}$

$y_{ö} = A \sin t + B \cos t$

$y_{ö}' = A \cos t - B \sin t$

$y_{ö}'' = -A \sin t - B \cos t$

$y_{ö}''' = -A \cos t + B \sin t$

$\Rightarrow -A\cos t + B\sin t + 2A \sin t + 2B \cos t - A\cos t + B \sin t + 2A \sin t + 2B \cos t = \sin t$

$(2B + 4A)\sin t + (-2A + 4B)\cos t = \sin t$

$$(2B+4A)\sin t + (-2A+4B)\cos t = \sin t$$

$$2B+4A=1$$
$$2/\ -2A+4B=0$$

$$10B=1$$

$$\left.\begin{array}{l} B=1/10 \\ A=2/10 \end{array}\right\} \Rightarrow y_{\ddot{o}} = \frac{2}{10}\sin t + \frac{1}{10}\cos t$$

$$y_{G.Ç} = y_h + y_{\ddot{o}} = c_1 e^{2t} + c_2 e^{t} + c_3 e^{-t} + \frac{1}{10}(2\sin t + \cos t)$$

Ör/ $y^{(4)} - 64y = 16\sin 2t$ denkleminin genel çözümünü bulunuz.

$$(D^4-64)y = 16\sin 2t$$

$$L(r) = r^4 - 64 = 0$$

$$(r^2-8)(r^2+8)=0$$

$$r^2-8=0 \Rightarrow r_{1,2} = \mp 2\sqrt{2}$$

$$r^2+8=0 \Rightarrow r_{3,4} = \mp 2\sqrt{2}i$$

$$y_h = c_1 e^{-2\sqrt{2}t} + c_2 e^{2\sqrt{2}t} + c_3\cos 2\sqrt{2}t + c_4 \sin 2\sqrt{2}t$$

$$y_{\ddot{o}} = A\sin 2t + B\cos 2t$$
$$y_{\ddot{o}}' = 2A\cos 2t - 2B\sin 2t$$
$$y_{\ddot{o}}'' = -4A\sin 2t - 4B\cos 2t$$

$$y_{\ddot{o}}''' = -8A\cos 2t + 8B\sin 2t$$
$$y^{(4)} = 16A\sin 2t + 16B\cos 2t$$

$$16A\sin 2t + 16B\cos 2t - 64A\sin 2t - 64B\cos 2t = 16\sin 2t$$

$$-48A\sin 2t - 48B\cos 2t = 16\sin 2t$$

$$-48A = 16 \quad , \quad -48B = 0$$

$$A = \frac{-1}{3} \qquad B = 0 \quad \Rightarrow \quad y_{ö} = -\frac{1}{3}\sin 2t$$

$$y_{G.Ç} = y_h + y_{ö} = C_1 e^{-2\sqrt{2}t} + C_2 e^{2\sqrt{2}t} + C_3\cos 2\sqrt{2}t + C_4\sin 2\sqrt{2}t - \frac{1}{3}\sin 2t$$

$$y_{\tilde{o}} = \frac{t^3}{3} + t^2 \Rightarrow y_{G.G} = c_1 + c_2 t + c_3 e^{-2t} + \frac{t^3}{3} + t^2$$