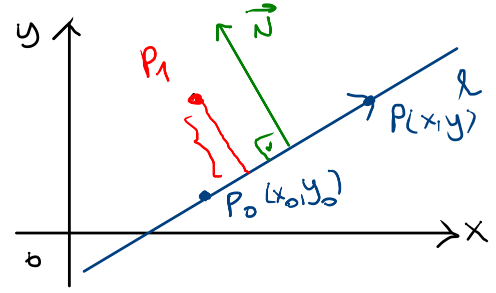
# Doğru ve Düzlem




## Düzlemde Doğru

$\vec{N} = a\vec{i} + b\vec{j}$ sıfırdan farklı bir vektör ve $P_0 = P_0(x_0, y_0)$, xy-düzleminde bir nokta olsun. $P_0$ noktasından geçen ve $\vec{N}$ vektörüne dik olan tek bir doğru vardır. $\vec{N}$ vektörüne doğrunun 'normali' denir.

$\vec{N}$ vektörüne dik olan bu doğru üzerinde bir $P = P(x,y)$ noktasını gözönüne alalım.

$$\overrightarrow{P_0P} = (x - x_0)\vec{i} + (y - y_0)\vec{j}$$

$$\overrightarrow{P_0P} \perp \vec{N} \Rightarrow \overrightarrow{P_0P} \cdot \vec{N} = 0 \Rightarrow \left[(x-x_0)\vec{i} + (y-y_0)\vec{j}\right]\left[a\vec{i} + b\vec{j}\right] = 0$$

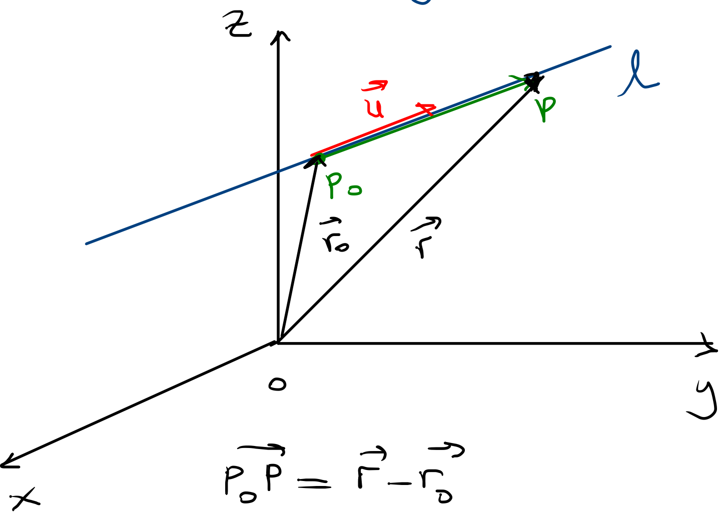
$$a(x - x_0) + b(y - y_0) = 0$$

$$ax + by + (\underbrace{-ax_0 - by_0}_{c}) = 0$$

$P_0$ noktasından geçen ve $\vec{N} \neq 0$ vektörüne dik olan doğrunun denklemi; $\Leftarrow$ $ax + by + c = 0$

* Bir $P_1(x_1, y_1)$ noktasının bu doğruya olan uzaklığı $d = \dfrac{|ax_1 + by_1 + c_1|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$ sayısıdır.

## 3-boyutlu uzayda doğru




$\overrightarrow{P_0P} = \vec{r} - \vec{r_0}$

$P_0(x_0, y_0, z_0)$ noktasından geçen ve $\vec{u} = a\vec{i} + b\vec{j} + c\vec{k}$ vektörüne paralel olan bir $\ell$ doğrusu olsun. $P(x, y, z)$ noktasının bu $\ell$ doğrusu üzerinde bulunması için $\overrightarrow{P_0P}$ vektörünün $\vec{u}$ vektörüne paralel olması gerekir. Yani,

$$\overrightarrow{P_0P} = t.\vec{u}$$

olacak şekilde bir $t$ sayısı vardır.

$$\overrightarrow{P_0P} = (x-x_0)\vec{i} + (y-y_0)\vec{j} + (z-z_0)\vec{k} = \vec{r} - \vec{r_0}$$

$$\underbrace{\overrightarrow{P_0P} = t.\vec{u}}\ \Rightarrow (x-x_0)\vec{i} + (y-y_0)\vec{j} + (z-z_0)\vec{k} = t\left[a\vec{i} + b\vec{j} + c\vec{k}\right]$$

$$\vec{r} - \vec{r_0} = t\vec{u}$$

$$\boxed{\vec{r} = \vec{r_0} + t\vec{u}}$$

doğrunun vektörel denklemi

$$\left.\begin{aligned} x - x_0 &= t.a \\ y - y_0 &= t.b \\ z - z_0 &= t.c \end{aligned}\right\} \qquad \left.\begin{aligned} x &= x_0 + at \\ y &= y_0 + bt \\ z &= z_0 + ct \end{aligned}\right\}$$

doğrunun parametrik denklemleri

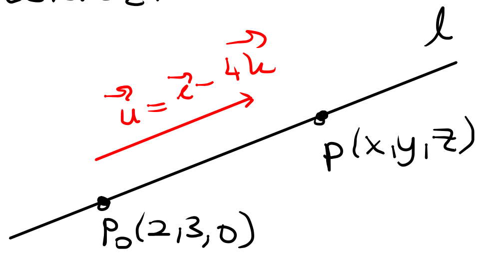
$$\frac{x-x_0}{a} = \frac{y-y_0}{b} = \frac{z-z_0}{c} = t$$

Doğrunun simetrik denklemleri

$P_0$ ve $P_1(x_1,y_1,z_1)$ noktalarından geçen doğrunun denklemi

$$\frac{x-x_0}{x_1-x_0}=\frac{y-y_0}{y_1-y_0}=\frac{z-z_0}{z_1-z_0}$$ dir.

Ör/ $(2,3,0)$ noktasından geçen ve $\vec{i}-4\vec{k}$ vektörüne paralel olan doğrunun parametrik denklemlerini bulunuz.




$$\overrightarrow{P_0P}=(x-2)\vec{i}+(y-3)\vec{j}+(z-0)\vec{k}$$

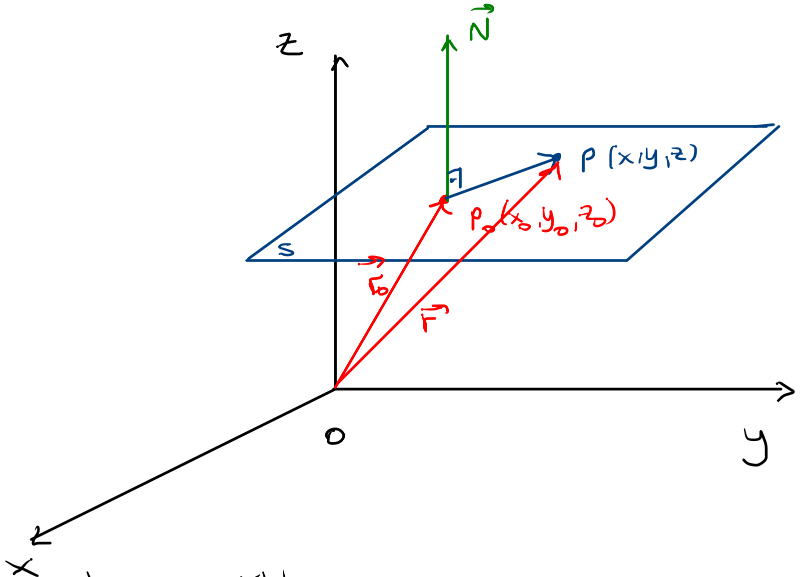
$$\overrightarrow{P_0P}\parallel\vec{u}\Rightarrow\overrightarrow{P_0P}=t.\vec{u}$$

$$(x-2)\vec{i}+(y-3)\vec{j}+z\vec{k}=t\vec{i}-4t\vec{k}\rightarrow$$ vektörel denklem.

$$\left.\begin{aligned}x-2&=t\\y-3&=0\\z&=-4t\end{aligned}\right\}\Rightarrow\left.\begin{aligned}x&=2+t\\y&=3\\z&=-4t\end{aligned}\right\}$$ doğrunun parametrik denklemleri.

## DÜZLEM

$P_0(x_0,y_0,z_0)$ uzayda bir nokta ve $\vec{N}=a\vec{i}+b\vec{j}+c\vec{k}$ sıfırdan farklı bir vektör olsun. $P_0$ noktasından geçen ve $\vec{N}$ vektörüne dik olan düzlemin denklemi, $\overrightarrow{P_0P}$, $\vec{N}$'e dik olacak şekildeki tüm $P$ noktalarının kümesi olarak tanımlanır.




$\overrightarrow{P_0P} \cdot \vec{N} = 0$

$\overrightarrow{P_0P} = (x-x_0)\vec{i} + (y-y_0)\vec{j} + (z-z_0)\vec{k}$

$\overrightarrow{P_0P} \cdot \vec{N} = 0$

$\Rightarrow a(x-x_0) + b(y-y_0) + c(z-z_0) = 0 \rightarrow$ Düzlemin skaler formu

$ax + by + cz + \underbrace{(-ax_0 - by_0 - cz_0)}_{d} = 0$

Standart denklem $\leftarrow ax + by + cz + d = 0 \rightarrow P_0$ noktasından geçen, $\vec{N}$ vektörüne dik olan düzlemin denklemi

**NOT:** a, b, c sabitlerinden en az biri sıfırdan farklı ise $ax+by+cz+d=0$ $\mathbb{R}^3$'te daima bir düzlem gösterir.

$x = 3 \rightarrow$ düzlem

$x + y = 5 \rightarrow$ düzlem

$\overrightarrow{P_0P} = \vec{r} - \vec{r_0} \Rightarrow (\vec{r} - \vec{r_0}) \cdot \vec{N} = 0 \rightarrow$ düzlemin vektörel denklemi

Uzayda iki düzlemin birbirine paralel olması için normal vektörlerinin birbirine paralel olması, birbirlerine dik olmaları için ise normallerinin birbirine dik olması gerekir.

## Örnekler

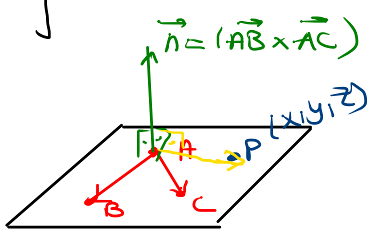
1) $P_0(-3,0,7)$ noktasından geçen ve $\vec{n}=5\vec{i}+2\vec{j}-\vec{k}$ vektörüne dik olan düzlem denklemini bulunuz. $(P(x,y,z))$

$$\overrightarrow{P_0P} = (x+3)\vec{i} + y\vec{j} + (z-7)\vec{k}$$

$$\overrightarrow{P_0P}\cdot\vec{n} = 0 \Rightarrow 5(x+3) + 2y - (z-7) = 0$$

$$5x+2y-z = -22$$

2) $A(0,0,1)$, $B(2,0,0)$, $C(0,3,0)$ noktalarından geçen düzlemin denklemini bulunuz.




$$\overrightarrow{AB} = 2\vec{i} - \vec{k}$$

$$\overrightarrow{AC} = 3\vec{j} - \vec{k}$$

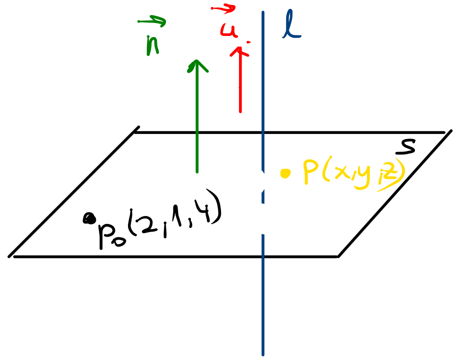
$$\vec{n} = \overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & 0 & -1 \\ 0 & 3 & -1 \end{vmatrix} = 3\vec{i} + 2\vec{j} + 6\vec{k} = \vec{n}$$

$$\overrightarrow{AP} = x\vec{i} + y\vec{j} + (z-1)\vec{k}$$

$$\vec{n}\cdot\overrightarrow{AP} = 0 \Rightarrow 3x+2y+6(z-1) = 0$$

$$3x+2y+6z = 6$$

3) Parametrik denklemleri $\left.\begin{array}{l} x = 2+t \\ y = 1+2t \\ z = 3 \end{array}\right\}$ olan $\ell$ doğrusuna dik ve $P_0(2,1,4)$ noktasından geçen düzlemin denklemini bulunuz.




$\vec{u} = \vec{i} + 2\vec{j} \;//\; \vec{n}$

$\vec{u} \perp S \qquad \vec{u} = \vec{n}$

$\overrightarrow{P_0P} = (x-2)\vec{i} + (y-1)\vec{j} + (z-4)\vec{k}$

$\overrightarrow{P_0P} \cdot \vec{u} = 0 \Rightarrow (x-2) + 2(y-1) = 0$

$x + 2y = 4$

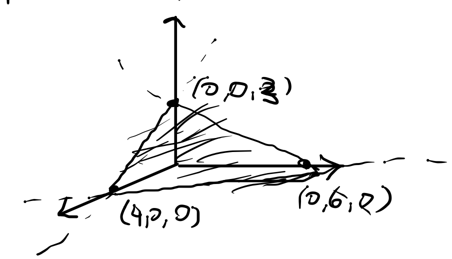
Öd: (2,0,1) noktasından geçen ve (1,1,0), (4,-1,-2) noktalarından geçen doğruya dik olan düzlemin denklemini bulunuz.

NOT: Eğer $ax+by+cz=d$ denkleminde $a,b,c$ katsayılarının tümü sıfırdan farklı ise koordinat eksenleri üzerindeki noktaları $a_1, b_1, c_1$ olan düzlemin denklemi

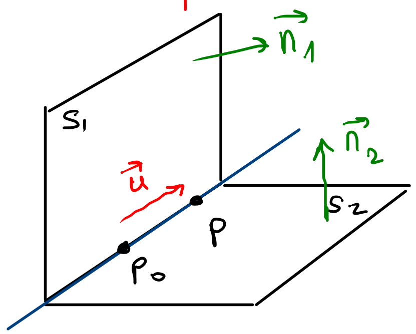
$$\frac{x}{a_1} + \frac{y}{b_1} + \frac{z}{c_1} = 1 \text{ dir.}$$

Ör: $3x + 2y + 4z = 12$

$$\frac{x}{4} + \frac{y}{6} + \frac{z}{3} = 1$$



# Kesişim Doğruları




İki düzlemin paralel olması için gerek ve yeter koşul onların normallerinin paralel olmasıdır. Paralel olmayan iki düzlem bir doğruda kesişirler.

$$\vec{u} = \vec{n}_1 \times \vec{n}_2$$

**NOT:** Bir düzlem denkleminde x, y ve z'nin katsayıları düzlemin normal vektörünün bileşenlerini verir.

**Ör/** a) $S_1: 3x-6y-2z=15$ düzlemi ile $S_2: 2x+y-2z=5$ düzleminin kesişim doğrusuna paralel bir vektör bulunuz.

$$\vec{n}_1 = 3\vec{i} - 6\vec{j} - 2\vec{k}$$
$$\vec{n}_2 = 2\vec{i} + \vec{j} - 2\vec{k}$$

$$\vec{u} = \vec{n}_1 \times \vec{n}_2 = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 3 & -6 & -2 \\ 2 & 1 & -2 \end{vmatrix} = 14\vec{i} + 2\vec{j} + 15\vec{k}$$

b) Bu düzlemlerin kesiştiği doğrunun parametrik denklemlerini bulunuz.

$$z=0 \Rightarrow \begin{array}{r} 3x - 6y = 15 \\ 6/\ 2x + y = 5 \\ \hline 15x = 45 \end{array}$$
$$x = 3 \Rightarrow y = -1$$

$P_0(3,-1,0)$ $\quad P(x,y,z)$

$$\overrightarrow{P_0P} = (x-3)\vec{i} + (y+1)\vec{j} + z\vec{k}$$
$$\vec{u} = 14\vec{i} + 2\vec{j} + 15\vec{k}$$

$$\overrightarrow{P_0P} = t.\vec{u}$$

$$\left.\begin{array}{l} x-3 = 14t \\ y+1 = 2t \\ z = 15t \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x = 3+14t \\ y = -1+2t \\ z = 15t \end{array}\right\} \text{P.D.}$$

Öd/ Parametrik denklemleri

$$x = \frac{8}{3} + 2t$$
$$y = -2t$$
$$z = 1 + t$$

olan doğrunun $3x + 2y + 6z = 6$ düzlemi ile kesiştiği noktayı bulunuz.

## Vektör Değerli Fonksiyonlar

Üç boyutlu uzayda bir $(x, y, z)$ noktasının yer vektörü $\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ şeklindedir. Eğer $\vec{r}$ vektörünün bileşenleri değişim aralığı $[a, b]$ olan bir reel $t$ değişkeninin fonksiyonları iseler bu taktirde $\vec{r}$'ye $t$'nin vektör değerli fonksiyonu denir.

$$\vec{r}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k}$$

Vektör değerli bir fonksiyon tanım kümesindeki herbir elemana bir vektör bağlar. Böyle bir fonksiyonun değer kümesi tanım kümesindeki noktalara karşılık gelen vektörlerin topluluğudur.