Limit Karşılaştırma için Örnekler

2°) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{n}}-\frac{1}{\sqrt{n+1}}\right)$ serisinin karakterini belirleyiniz.

$$a_n=\frac{1}{\sqrt{n}}-\frac{1}{\sqrt{n+1}}=\frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{\sqrt{n}.\sqrt{n+1}}$$

$$b_n=\frac{1}{\sqrt{n}} \Rightarrow \lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{\cancel{\sqrt{n}}.\sqrt{n+1}}\cdot\cancel{\sqrt{n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\cancel{\sqrt{n+1}}\left(1-\sqrt{\frac{n}{n+1}}\right)}{\cancel{\sqrt{n+1}}}=0 \ ?$$

∞ olmalıydı.

Yanlış bir seçim.

$p=\frac{1}{2}<1$ ıraksak

$$a_n=\frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{\sqrt{n}.\sqrt{n+1}}$$

$$b_n=\frac{1}{n\left[\sqrt{n+1}+\sqrt{n}\right]}<\frac{1}{n\left[\sqrt{n}+\sqrt{n}\right]}=\frac{1}{2n^{3/2}}<\frac{1}{n^{3/2}}$$ p-serisi $p=\frac{3}{2}>1$ yak.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{\sqrt{n}.\sqrt{n+1}}\cdot n\left[\sqrt{n+1}+\sqrt{n}\right]=\lim_{n\to\infty}\frac{n.(\cancel{n}+1-\cancel{n})}{\sqrt{n}\sqrt{n+1}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}}=\lim_{n\to\infty}\sqrt{\frac{n}{n+1}}=1 \neq 0,\infty$$

a_n ve b_n aynı karakterdedir.

3°) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^2 \ln n}$ serisinin karakterini belirleyiniz.

$a_n = \frac{1}{n^2 \ln n}$

$b_n = \frac{1}{n^2}$ p-serisi $p=2>1$ yakınsak.

$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\cancel{n^2}\ln n} \cdot \cancel{n^2} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\ln n} = 0$

$L=0$ ve $\sum b_n$ yakınsak olduğundan $\sum a_n$'de yakınsaktır.

3°) Oran (Bölüm) Testi (D'Alembert)

$\sum a_n$ pozitif terimli bir seri olmak üzere

$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = L \geq 0$ olsun.

i) Eğer $0 \leq L < 1$ ise o zaman $\sum a_n$ serisi yakınsaktır.

ii) Eğer $L > 1$ ise o zaman $\sum a_n$ serisi ıraksaktır.

iii) Eğer $L = 1$ ise test cevap vermez. (Böyle bir durumda n. terim testi uygulanabilir)

ÖRNEKLER

1) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{n-1}}{(n-1)!}$ serisinin karakterini belirleyiniz.

$$a_n = \frac{2^{n-1}}{(n-1)!}, \quad a_{n+1} = \frac{2^n}{n!} \Bigg\} \Rightarrow \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{2^n}{n!} \cdot \frac{(n-1)!}{2^{n-1}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\cancel{2^n}}{\cancel{2^n} \cdot 2^{-1}} \cdot \frac{\cancel{(n-1)!}}{n \cdot \cancel{(n-1)!}} = \lim_{n\to\infty} \frac{2}{n} = 0$$

$\sum a_n$ serisi yakınsaktır. (i den dolayı)

2) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{5^n - 4n}$ serisinin karakterini belirleyiniz.

$$a_n = \frac{n^2}{5^n - 4n}, \quad a_{n+1} = \frac{(n+1)^2}{5^{n+1} - 4(n+1)} \Bigg\} \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^2}{5^{n+1} - 4(n+1)} \cdot \frac{5^n - 4n}{n^2} = \lim_{n\to\infty} \left\{ \left(\frac{n+1}{n}\right)^2 \cdot \frac{5^n \left[1 - \frac{4n}{5^n}\right]}{5^{n+1}\left[1 - \frac{4(n+1)}{5^{n+1}}\right]} \right\}$$

$$= \frac{1}{5} \lim_{n\to\infty} \left\{ \underbrace{\left(\frac{n+1}{n}\right)^2}_{1} \cdot \left(\frac{1 - \cancel{\frac{4n}{5^n}}^{0}}{1 - \cancel{\frac{4(n+1)}{5^n}}^{0}} \right) \right\} = \frac{1}{5} < 1$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{4n}{5^n} \overset{\frac{\infty}{\infty}}{\underset{LH}{=}} \lim_{n\to\infty} \frac{4}{5^n . \ln 5} = 0$$

Dolayısıyla seri yakınsaktır.

3) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1+\pi^n}{n^{\pi}(1+e^n)}$ serisinin karakterini belirleyiniz.

$$\left.\begin{array}{l} a_n = \dfrac{1+\pi^n}{n^{\pi}(1+e^n)} \\[2ex] a_{n+1} = \dfrac{1+\pi^{n+1}}{(n+1)^{\pi}(1+e^{n+1})} \end{array}\right\} \Rightarrow \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1+\pi^{n+1}}{(n+1)^{\pi}(1+e^{n+1})} \cdot \frac{n^{\pi}\cdot(1+e^n)}{1+\pi^n} = \lim_{n\to\infty}\left[\left(\frac{n}{n+1}\right)^{\pi}\cdot\left(\frac{1+e^n}{1+e^{n+1}}\right)\cdot\left(\frac{1+\pi^{n+1}}{1+\pi^n}\right)\right]$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left[\left(\frac{n}{n+1}\right)^{\pi}\cdot\left(\frac{\cancel{e^n}\cdot(e^{-n}+1)}{\cancel{e^n}(e^{-n}+e)}\right)\left(\frac{\cancel{\pi^n}(\pi^{-n}+\pi)}{\cancel{\pi^n}(\pi^{-n}+1)}\right)\right]$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left[\underbrace{\left(\frac{n}{n+1}\right)^{\pi}}_{1}\left(\frac{\cancelto{0}{\frac{1}{e^n}}+1}{\cancelto{0}{\frac{1}{e^n}}+e}\right)\left(\frac{\cancelto{0}{\frac{1}{\pi^n}}+\pi}{\cancelto{0}{\frac{1}{\pi^n}}+1}\right)\right] = 1\cdot\frac{1}{e}\cdot\pi = \frac{\pi}{e} > 1$$

seri ıraksaktır.

4) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4^n\,(n!)^2}{(2n)!}$ serisinin karakterini belirleyiniz.

$$a_n = \frac{4^n\,(n!)^2}{(2n)!}\ ,\quad a_{n+1} = \frac{4^{n+1}\,[(n+1)!]^2}{[2(n+1)]!} \Rightarrow \lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty}\frac{4^{n+1}\cdot[(n+1)!]^2}{[2(n+1)]!}\cdot\frac{(2n)!}{4^n\cdot(n!)^2}$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{4^{n+1}\cdot\left[(n+1)!\right]^2}{\left[2(n+1)\right]!}\cdot\frac{(2n)!}{4^n\cdot(n!)^2} = \lim_{n\to\infty} \frac{4^{n+1}}{4^n}\cdot\frac{\left[(n+1)\cdot n!\right]^2}{(2n+2)(2n+1)\cancel{(2n)!}}\cdot\frac{\cancel{(2n)!}}{(n!)^2}$$

$$= \lim_{n\to\infty} 4\cdot\frac{(n+1)^2\cdot\cancel{(n!)^2}}{(2n+2)(2n+1)\cdot\cancel{(n!)^2}}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{4\cdot(n+1)^2}{(2n+2)(2n+1)} = \lim_{n\to\infty}\frac{4(n^2+2n+1)}{4n^2+6n+2} = \lim_{n\to\infty}\frac{4n^2+8n+4}{4n^2+6n+2} = 1$$

Test cevap vermez.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{4^n\cdot(n!)^2}{(2n)!} = \lim_{n\to\infty}\frac{2^{2n}\cdot(n!)^2}{(2n)!} \overset{0\cdot\infty}{=} \lim_{n\to\infty}\frac{(n!)^2}{\frac{(2n)!}{2^{2n}}} \overset{\frac{\infty}{\infty}}{=}$$

$$\left(\lim_{n\to\infty}\frac{x^n}{n!}=0\right)$$

(Raabe testi)

$$\lim_{n\to\infty} n\cdot\left[\frac{a_{n+1}}{a_n}-1\right] \begin{array}{l} <1 \text{ ise yakinsak} \\ >1 \text{ ise iraksak.}\end{array}$$

$$\lim_{n\to\infty} n\cdot\left[\frac{4n^2+8n+4}{4n^2+6n+2}-1\right] = \lim_{n\to\infty} n\cdot\left[\frac{2n+2}{4n^2+6n+2}\right]$$

$$= \frac{2}{4} = \frac{1}{2} < 1 \text{ yakinsak.}$$

Cauchy kök testi

$\sum a_n$ pozitif terimli bir seri olmak üzere

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = L \text{ olsun.}$$

i) Eğer $0 \le L < 1$ ise seri yakınsaktır.

ii) Eğer $L > 1$ ise seri ıraksaktır.

iii) Eğer $L = 1$ ise test cevap vermez.

ÖRNEKLER

1) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1+2^n}{1+4^n}$ serisinin karakterini belirleyiniz.

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{1+2^n}{1+4^n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{(1+2^n)^{1/n}}{(1+4^n)^{1/n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\left[2^n\left(\frac{1}{2^n}+1\right)\right]^{1/n}}{\left[4^n\left(\frac{1}{4^n}+1\right)\right]^{1/n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{2\,(\cancel{2^{-n}}^{\,0}+1)^{1/n}}{4\,(\cancel{4^{-n}}^{\,0}+1)^{1/n}} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2} < 1$$

seri yakınsaktır.

2) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(\pi^{-n})}{1+\pi^{n}}$ serisinin karakterini belirleyiniz.

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty} \left[\frac{\sin(\pi^{-n})}{1+\pi^{n}}\right]^{1/n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\left[\sin(\pi^{-n})\right]^{1/n}}{(1+\pi^{n})^{1/n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\left[\underbrace{\frac{\sin(\pi^{-n})}{\pi^{-n}}}_{\to 1} \cdot \pi^{-n}\right]^{1/n}}{\left[\pi^{n}(\pi^{-n}+1)\right]^{1/n}} = \frac{\pi^{-1}}{\pi \cdot 1} = \frac{1}{\pi^{2}} < 1$$

seri yakınsaktır.

$n\to\infty \quad \pi^{-n} \to 0$

$\downarrow$

$\frac{1}{\pi^{n}}$

3) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} e^{n}\left[1-\cos(e^{-n})\right]$ serisinin karakterini belirleyiniz.

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty} \left\{e^{n}\left[1-\cos(e^{-n})\right]\right\}^{1/n} = \lim_{n\to\infty} e \cdot \underbrace{\left[1-\cos(e^{-n})\right]^{1/n}} = e \lim_{n\to\infty} \left[1-\cos(e^{-n})\right]^{1/n} = e \cdot 0^{0} \quad \text{B.f.}$$

$$b = \lim_{n\to\infty} \left[1-\cos(e^{-n})\right]^{1/n} \text{ olsun.}$$

$$\ln b = \lim_{n\to\infty} \ln\left[1-\cos(e^{-n})\right]^{1/n}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \cdot \ln\left[1-\cos(e^{-n})\right]$$

$$\overset{0\cdot\infty}{=} \lim_{n\to\infty} \frac{\ln\left[1-\cos(e^{-n})\right]}{n}$$

$$\overset{\frac{\infty}{\infty}}{\underset{L'H}{=}} \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{-e^{-n}\sin(e^{-n})}{1-\cos(e^{-n})}}{1} = \lim_{n\to\infty} \frac{-e^{-n}\sin(e^{-n})}{1-\cos(e^{-n})} \cdot \frac{1+\cos(e^{-n})}{1+\cos(e^{-n})} = \lim_{n\to\infty} \frac{-e^{-n}\sin(e^{-n})(1+\cos(e^{-n}))}{1-\cos^2(e^{-n})}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{-e^{-n}\cancel{\sin(e^{-n})}(1+\cos(e^{-n}))}{\sin^{\cancel{2}}(e^{-n})} = -\lim_{n\to\infty} \frac{e^{-n}\overbrace{(1+\cos(e^{-n}))}^{\to 1}}{\sin(e^{-n})}$$

$$e^{-n} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

$$= -2$$

$$\Rightarrow \quad b = e^{-2} \qquad \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = e \cdot b = e \cdot e^{-2} = e^{-1} < 1 \quad \text{yak.}$$

Değişik işaretli Seriler

Terimlerinin bir kısmı negatif bir kısmı ise pozitif reel sayılardan oluşan serilere değişik işaretli seriler denir. Özel olarak terimleri bir pozitif, bir negatif veya bir negatif, bir pozitif olan serilere Alternatif (Alterne) seriler denir.

$+, -, +, -, \ldots$ $\qquad \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \cdot a_n$

$-, +, -, +, \ldots$ $\qquad \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n} \cdot a_n$

Verilen değişik işaretli seriden onun tüm terimlerinin mutlak değerleri alınarak elde edilen seri pozitif terimli bir seri olacaktır. Bu pozitif terimli serinin karakteri incelenerek değişik işaretli serinin karakteri hakkında bilgi elde edebiliriz.

Mutlak Yakınsaklık

Eğer $\sum |a_n|$ serisi yakınsak ise $\sum a_n$ serisi mutlak yakınsaktır.

Teorem: Mutlak yakınsak bir seri yakınsaktır. (Teoremin tersi doğru değildir)

Şartlı Yakınsaklık

Bir $\sum a_n$ serisi yakınsak fakat mutlak yakınsak değilse şartlı yakınsaktır.

* Alterne Seri Testi:

Eğer alterne seri aşağıdaki iki koşulu sağlıyorsa yakınsaktır.

i) $\forall n$ için $a_n \geq a_{n+1}$ olmalı ve

ii) $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ olmalıdır.

Bu koşullardan herhangi biri sağlanmıyorsa alterne seri ıraksaktır.

Ör/ $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2+1}$ serisinin karakterini belirleyiniz.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{(-1)^{n+1}}{n^2+1} \right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+1}$$

$n^2 < n^2+1 \Rightarrow \frac{1}{n^2+1} < \frac{1}{n^2}$ $\qquad \frac{1}{n^2} \to$ p-serisi $p=2>1$ yakınsak.

direk karşılaştırmaya göre $\sum \frac{1}{n^2+1}$ 'de yakınsaktır.

Mutlak değerlerden oluşan seri yakınsak olduğundan Alterne seri mutlak yakınsaktır. Dolayısıyla yakınsaktır.

Ör/ $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}$ Alternatif Harmonik serinin karakterini belirleyiniz.

$\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{(-1)^{n-1}}{n} \right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ Harmonik seri daima ıraksaktır.

$a_n = \frac{1}{n}$

Alterne Seri testine göre

1°) $n < n+1 \Rightarrow \frac{1}{n} > \frac{1}{n+1} \Rightarrow a_n > a_{n+1}$ ($\forall n$ için)

2°) $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$

Her iki şart sağlandığından Alt. seri yakınsaktır. Ancak mutlak değerlerden oluşan seri ıraksak olduğundan şartlı yakınsaktır.