Birinci Mertebeden Yüksek Dereceli Denklemler

Clairaut dif. denk.

$y = xy' + \varphi(y')$ şeklindeki denklemlerdir. Bu denklemler bir parametre kullanılarak çözülür.

$$y' = p \Rightarrow y = xp + \varphi(p)$$

x'e göre türev alırsak;

$$y' = p + xp' + p'\varphi'(p)$$

$$\Rightarrow \cancel{p} = \cancel{p} + xp' + p'\varphi'(p) \Rightarrow p'\left[x + \varphi'(p)\right] = 0$$

1°) $p' = 0 \Rightarrow p = c \Rightarrow \boxed{y = xc + \varphi(c)}$ G.Ç.

2°) $x + \varphi'(p) = 0 \Rightarrow \boxed{\begin{array}{l} x = -\varphi'(p) \\ y = -p\varphi'(p) + \varphi(p) \end{array}}$ Tekil çözümün parametrik denk.

Bu parametrik denklemler arasında p parametresi yok edilerek $F(x,y)=0$ şeklinde tekil çözümün kartezyen denklemi elde edilebilir. Tekil (Aykırı) çözüm, genel çözümü oluşturan bir parametreli eğri ailesinin zarfıdır.

Sonuç olarak, Clairaut denkleminin çözümleri bir eğri ve bu eğriye teğet olan doğrulardan ibarettir.

Ör/ $y = \underbrace{xy'}_{xy'} + \underbrace{y' - y'^2}_{\varphi(y')}$ dif. denklemini çözünüz.

$xy' + \varphi(y')$ Clairaut dif. denk.

$$y' = p \Rightarrow \quad y = xp + p - p^2$$

$$\Rightarrow y' = p + xp' + p' - 2pp'$$

$$\Rightarrow \cancel{p} = \cancel{p} + xp' + p' - 2pp'$$

$$\Rightarrow p'[x + 1 - 2p] = 0$$

1°) $p' = 0 \Rightarrow p = c \Rightarrow \boxed{y = xc + c - c^2}$ G.Ç.

2°) $x + 1 - 2p = 0 \Rightarrow x = 2p - 1$

$$\Rightarrow y = (2p-1)p + p - p^2$$

$$\Rightarrow y = 2p^2 - \cancel{p} + \cancel{p} - p^2 = p^2$$

$$\boxed{\begin{aligned} x &= 2p-1 \\ y &= p^2 \end{aligned}}$$

T.G'ün parametrik denklemleri

$$x = 2p-1 \Rightarrow p = \frac{x+1}{2} \Rightarrow \boxed{y = \left(\frac{x+1}{2}\right)^2}$$

T.G'ün kartezyen denk.

Ör/ $y'^3 + 3xy' - 3y = 0$ dif. denk'ni çözünüz.

$$3y = 3xy' + y'^3$$

$$y = xy' + \frac{1}{3}y'^3 \quad \text{Clairaut dif. denk.}$$

$$y' = p \Rightarrow \quad y = xp + \frac{p^3}{3}$$

$$\Rightarrow y' = p + xp' + p^2p'$$

$$\Rightarrow \cancel{p} = \cancel{p} + xp' + p^2p'$$

$$\Rightarrow p'\left[x + p^2\right] = 0$$

1°) $p' = 0 \Rightarrow p = c \Rightarrow \boxed{y = xc + \frac{c^3}{3}}$ G.Ç.,

2°) $x + p^2 = 0 \Rightarrow x = -p^2$

$$y = -p^3 + \frac{p^3}{3} = \frac{-2p^3}{3}$$

$$-\frac{3y}{2} = p^3 \Rightarrow p = \left(-\frac{3y}{2}\right)^{1/3}$$

$$p=\left(-\frac{3y}{2}\right)^{1/3} \Rightarrow x=-\left(-\frac{3y}{2}\right)^{2/3}$$

Ör/ $y=xy'+\sqrt{1+y'^2}$ dif. denk. çözünüz.

$$y'=p \Rightarrow y=xp+\sqrt{1+p^2}$$

$$y'=p+xp'+\frac{2pp'}{2\sqrt{1+p^2}}$$

$$\cancel{p}=\cancel{p}+xp'+\frac{\cancel{2}pp'}{\cancel{2}\sqrt{1+p^2}}$$

$$\Rightarrow p'\left[x+\frac{p}{\sqrt{1+p^2}}\right]=0$$

1°) $p'=0 \Rightarrow p=c$

$$\Rightarrow \boxed{y=xc+\sqrt{1+c^2}}$$ G.G.

2°) $x+\frac{p}{\sqrt{1+p^2}}=0 \Rightarrow x=\frac{-p}{\sqrt{1+p^2}}$

$$y=\frac{-p^2}{\sqrt{1+p^2}}+\sqrt{1+p^2}$$

$$\Rightarrow \boxed{\begin{array}{l} x=\dfrac{-p}{\sqrt{1+p^2}} \\ y=\dfrac{1}{\sqrt{1+p^2}} \end{array}}$$

T.Ç'ün parametrik denk.

$$x = \frac{-p}{\sqrt{1+p^2}} \Rightarrow x^2 = \frac{p^2}{1+p^2} \Rightarrow x^2 + p^2x^2 = p^2 \Rightarrow x^2 = p^2(1-x^2)$$

$$\Rightarrow p^2 = \frac{x^2}{1-x^2}$$

$$\Rightarrow p = \mp \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} \Rightarrow y = \frac{1}{\sqrt{1+\left(\mp\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\right)^2}}$$

$$\Rightarrow y = \frac{1}{\sqrt{1+\frac{x^2}{1-x^2}}} = \sqrt{1-x^2}$$

$$\boxed{y = \sqrt{1-x^2}}$$

T. gün kartezyen denk.

Lagrange dif. denk.

$y = x.\varphi(y') + Q(y')$ şeklindeki denklemlerdir.

Bu denklemler de parametre kullanılarak çözülür.

$$y' = p \Rightarrow \quad y = x\varphi(p) + Q(p)$$

x'e göre türev alalım.

$$y' = \varphi(p) + x p' \varphi'(p) + p' Q'(p)$$

$$p = \varphi(p) + p'\left[x\varphi'(p) + Q'(p)\right]$$

$$p - \varphi(p) = p'\left[x\varphi'(p) + Q'(p)\right] \Rightarrow p' = \frac{p-\varphi(p)}{x\varphi'(p) + Q'(p)}$$

$$\Rightarrow \frac{dp}{dx} = \frac{p-\varphi(p)}{x\varphi'(p)+Q'(p)} \Rightarrow \frac{dx}{dp} = \frac{x\varphi'(p)+Q'(p)}{p-\varphi(p)}$$

$y' + p(x)y = q(x)$
L.D.D.

$$\Rightarrow \frac{dx}{dp} = x\cdot\frac{\varphi'(p)}{p-\varphi(p)} + \frac{Q'(p)}{p-\varphi(p)}$$

$$\Rightarrow \frac{dx}{dp} - x\cdot\frac{\varphi'(p)}{p-\varphi(p)} = \frac{Q'(p)}{p-\varphi(p)}$$

(x'in fonksiyon p'nin değişken olduğu bir lineer dif. denk)

$$\Rightarrow x' - a(p)x = b(p)$$

$$\Rightarrow \boxed{\begin{array}{l} x = \Delta(p,c) \quad \text{bulunur.} \\ y = \Delta(p,c)\,\varphi(p) + Q(p) \end{array}}$$

Genel çözümün parametrik denklemleri.

Ör/ $y = \underbrace{2xy'}_{}\underbrace{-y'^2-1}_{}$ dif. denk'nin genel çözümünü bulunuz.

$x\varphi(y') + Q(y')$ Lagrange dif. denk.

$y' = p \Rightarrow y = 2xp - p^2 - 1$

$y' = 2p + 2xp' - 2pp'$

$p = 2p + 2xp' - 2pp'$

$\Rightarrow -p = p'[2x - 2p]$

$\Rightarrow p' = \dfrac{p}{2p-2x}$

$\dfrac{dx}{dp} = \dfrac{2p-2x}{p} \Rightarrow \dfrac{dx}{dp} = 2 - 2\dfrac{x}{p}$

$\Rightarrow \dfrac{dx}{dp} + 2\dfrac{x}{p} = 2$ L.D.D.

$a(p) = \dfrac{2}{p}$

$b(p) = 2$

$\lambda = e^{\int a(p)dp} = e^{\int \frac{2}{p}dp} = e^{2\ln p} = p^2$

$\Rightarrow p^2\dfrac{dx}{dp} + 2px = 2p^2 \Rightarrow \underbrace{p^2dx + 2px\,dp}_{} = 2p^2dp$

$\Rightarrow \int d(p^2x) = \int 2p^2dp$

$$p^2 x = \frac{2p^3}{3} + k$$

$$\boxed{x = \frac{2p}{3} + k.p^{-2}}$$

$$y = 2\left[\frac{2p}{3} + \frac{k}{p^2}\right]p - p^2 - 1$$

$$\boxed{y = \frac{p^2}{3} - 1 + \frac{2k}{p^2}}$$

$$\boxed{\begin{aligned} x &= \frac{2p}{3} + \frac{k}{p^2} \\ y &= \frac{p^2}{3} - 1 + \frac{2k}{p^2} \end{aligned}}$$

G.Ç'ün parametrik denklemleri

Ör/ $y = x\underbrace{y'^2}_{x\varphi(y')} + \underbrace{y'^3}_{\varnothing(y')}$ dif. denkleminin genel çözümünü bulunuz.

Lagrange dif. denk.

$$y' = p \Rightarrow y = xp^2 + p^3 \Rightarrow y' = p^2 + 2xpp' + 3p^2p'$$

$$\Rightarrow p = p^2 + 2xpp' + 3p^2p'$$

$$\Rightarrow p - p^2 = p'\left[2xp + 3p^2\right]$$

$$\Rightarrow p' = \frac{p - p^2}{2xp + 3p^2} \Rightarrow \frac{dx}{dp} = \frac{2xp + 3p^2}{p - p^2} \quad (p - p^2 \neq 0)$$

$$\Rightarrow \frac{dx}{dp} = 2x\frac{p}{p - p^2} + \frac{3p^2}{p - p^2} \Rightarrow \frac{dx}{dp} - 2x\frac{p}{p - p^2} = \frac{3p^2}{p - p^2}$$

L.D.D.

$$\frac{dx}{dp} - 2x\frac{p}{p-p^2} = \frac{3p^2}{p-p^2} \Rightarrow \frac{dx}{dp} + x\cdot\frac{-2}{1-p} = \frac{3p}{1-p}$$

$$a(p) = \frac{-2}{1-p} \qquad \lambda = e^{\int\frac{-2}{1-p}dp} = e^{2\ln|1-p|} = (1-p)^2$$

$$b(p) = \frac{3p}{1-p}$$

$$(1-p)^2\frac{dx}{dp} + x\cdot(1-p)^2\left(\frac{-2}{1-p}\right) = (1-p)^2\cdot\frac{3p}{1-p}$$

$$p-p^2=0$$

$$p=0 \qquad p=1$$

$$y'=0 \qquad y'=1$$

$$\boxed{y=c} \qquad \boxed{y=x+c}$$

T.Ç.

$$\underbrace{(1-p)^2dx - 2x(1-p)\,dp}_{} = 3p(1-p)\,dp$$

$$\int d\left[(1-p)^2x\right] = \int 3p(1-p)\,dp$$

$$(1-p)^2x = \frac{3p^2}{2} - p^3 + k$$

G.Ç.'ün parametrik denk.

$$x = \frac{p^2(3-p)}{2(1-p)^2} + \frac{k}{(1-p)^2}$$

$$y = \frac{p^4(3-p)}{2(1-p)^2} + \frac{kp^2}{(1-p)^2} + p^3$$

Ör/ $y = \underbrace{-xy'}_{x\varphi(y')} + \underbrace{y' + 1}_{\psi(y')}$ dif denkleminin genel çözümünü bulunuz.

$$y' = p \Rightarrow y = -xp + p + 1 \Rightarrow y' = -p - xp' + p' \Rightarrow p = -p - xp' + p'$$

$$\Rightarrow 2p = p'\left[1 - x\right]$$

$$\Rightarrow \frac{dx}{dp} = \frac{1 - x}{2p} \Rightarrow \frac{dx}{dp} + \frac{x}{2p} = \frac{1}{2p} \quad \text{L.D.D.}$$

$$\frac{dx}{dp} + \frac{x}{2p} = 0 \Rightarrow \int \frac{dx}{x} + \int \frac{dp}{2p} = \int 0 \Rightarrow 2\ln|x| + \frac{1}{2}\ln|p| = \ln c \Rightarrow x = \frac{c}{\sqrt{p}}$$

$$c = c(p) \Rightarrow \frac{dx}{dp} = \frac{c'\sqrt{p} - \frac{1}{2\sqrt{p}}c}{p} \Rightarrow \frac{dx}{dp} = \frac{c'}{\sqrt{p}} - \frac{c}{2p^{3/2}} \Rightarrow \frac{c'}{\sqrt{p}} - \cancel{\frac{c}{2p^{3/2}}} + \cancel{\frac{1}{2p} \cdot \frac{c}{\sqrt{p}}} = \frac{1}{2p}$$

$$\Rightarrow c' = \frac{1}{2\sqrt{p}} \Rightarrow c = \sqrt{p} + k$$

$$\Rightarrow \boxed{\begin{aligned} x &= 1+\frac{k}{\sqrt{p}} \\ y &= -\left(1+\frac{k}{\sqrt{p}}\right)p+p+1 \end{aligned}}$$

G.Ç'ün parametrik denk.

$$\to y = \frac{-k}{\sqrt{p}}p+1$$

$$x = 1+\frac{k}{\sqrt{p}} \Rightarrow \frac{k}{\sqrt{p}} = x-1 \Rightarrow \sqrt{p} = \frac{k}{x-1} \Rightarrow p = \frac{k^2}{(x-1)^2}$$

$$\Rightarrow y = -(x-1)\cdot\frac{k^2}{(x-1)^2}+1 \Rightarrow \boxed{y = 1-\frac{k^2}{x-1}}$$

G.Ç'ün kartezyen denk.

Yüksek Mertebeden Dif. Denklemler

Bir dif. denklemin mertebesi iki veya daha büyükse bunlar yüksek mertebeden dif. denklemler adı altında bir bütün olarak incelenir. Genel olarak n. mertebeden bir dif. denklem

$$A_0(x)\,y^{(n)} + A_1(x)\,y^{(n-1)} + \cdots + A_{n-1}(x)\,y' + A_n(x)\,y = F(x)$$

şeklindedir. $n>0$ tamsayıdır. $A_0(x) \neq 0$ dır.

Çözümler

Aksi söylenmedikçe veya gerekli şartlar meydana gelmedikçe öncelikle Genel çözüm esas olacaktır. Özel çözüm ya da herhangi şartları sağlayan çözüm genel çözümden hesaplanacak olan çözümlerdir.

Genel çözümün temel özelliği denklemin mertebesine eşit sayıda keyfi sabit bulundurmasıdır. n. mertebeden bir dif. denklemin genel çözümü n tane keyfi sabit içerecektir.

Yani $c_1, c_2, \ldots, c_n$ n tane keyfi sabit olmak üzere n. mertebeden bir dif. denk.'in genel çözümü

$$f(x, y, c_1, c_2, \ldots, c_n) = 0$$

şeklinde bir fonksiyondur.

Yüksek mertebeden bir dif. denklemi sağlayan birden çok çözüm fonksiyonu vardır ve bu fonksiyonların birbirlerinden lineer bağımsız olmaları gerekir.

Lineer Bağımlılık ve Bağımsızlık

Tanım: Eğer tümü sıfır olmayan $c_1, c_2, \ldots, c_n$ sabitleri ve $[a,b] \subseteq \mathbb{R}$ alt aralığındaki tüm x değerleri için

$$c_1 f_1(x) + c_2 f_2(x) + \cdots + c_n f_n(x) = 0 \qquad (1)$$

eşitliği sağlanıyorsa o zaman $f_1(x), f_2(x), \ldots, f_n(x)$ fonksiyonlarına Lineer bağımlıdır denir.

Ancak $[a,b] \subseteq \mathbb{R}$ alt aralığındaki tüm x değerleri için (1) eşitliği sadece $c_1 = c_2 = \dots = c_n = 0$ olduğunda gerçekleniyorsa o zaman $f_1, f_2, \dots, f_n$ fonksiyonlarına lineer bağımsız fonksiyonlardır denir.

Ör/ $\left.\begin{aligned} f_1(x) &= x \\ f_2(x) &= 2x \end{aligned}\right\}$ $[0,1] \subseteq \mathbb{R}$ üzerinde f_1 ve f_2 lineer bağımlıdırlar. Çünkü

$$c_1 f_1 + c_2 f_2 = c_1 \cdot x + c_2 \cdot 2x = 0$$

$$\left.\begin{aligned} c_1 &= -2 \neq 0 \\ c_2 &= 1 \neq 0 \end{aligned}\right\} \quad \begin{aligned} c_1 &= 2 \neq 0 \\ c_2 &= -1 \neq 0 \end{aligned}$$

Ör/ $\left.\begin{aligned} f_1(x) &= x \\ f_2(x) &= x^2 \end{aligned}\right\}$ $[0,1] \subseteq \mathbb{R}$ üzerinde f_1 ve f_2 lineer bağımsızdırlar.

$c_1 f_1 + c_2 f_2 = 0 \Rightarrow c_1 x + c_2 x^2 = 0$ eşitliği sadece $c_1 = c_2 = 0$ için sağlanır.

Tanım: $I=[a,b]$ aralığında tanımlı $f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x)$ fonksiyonlarının n. mertebeye kadar sürekli türevleri olsun. Bu durumda bu fonksiyonların I aralığında lineer bağımlı olması için gerek koşul I aralığındaki her x değeri için

$$W(f_1, f_2, \dots, f_n) = \begin{vmatrix} f_1 & f_2 & \cdots & f_n \\ f_1' & f_2' & \cdots & f_n' \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ f_1^{(n-1)} & f_2^{(n-1)} & \cdots & f_n^{(n-1)} \end{vmatrix} = 0$$

olmasıdır. Bu determinanta $f_1, f_2, \dots, f_n$ fonksiyonlarının Wronskian determinantı denir. $W=0$ olması lineer bağımlılık için gerek koşuldur, yeterli değildir.

$f_1, f_2, \dots, f_n$ fonksiyonlarının I aralığında lineer bağımsız olması için gerek ve yeter koşul $W \neq 0$ olmasıdır.

Ör/ a ve b iki reel sayı $b \neq 0$ olsun. Bu durumda

$f_1 = e^{ax}\cos bx$, $f_2 = e^{ax}\sin bx$ fonksiyonları tüm reel eksende Lineer bağımsızdırlar.

$$f_1' = ae^{ax}\cos bx - be^{ax}\sin bx \qquad f_2' = ae^{ax}\sin bx + be^{ax}\cos bx$$

$$W(f_1, f_2) = \begin{vmatrix} e^{ax}\cos bx & e^{ax}\sin bx \\ ae^{ax}\cos bx - be^{ax} & ae^{ax}\sin bx + be^{ax}\cos bx \end{vmatrix}$$

$$= \cancel{ae^{2ax}\sin bx\cos bx} + be^{2ax}\cos^2 bx - \cancel{ae^{2ax}\cos bx\sin bx} + be^{2ax}\sin^2 bx$$

$$= \underbrace{b}_{\neq}\underbrace{e^{2ax}}_{\neq 0} \neq 0$$

Ör/ $1, \sin^2 x, \cos^2 x$ fonksiyonları herhangi bir aralıkta Lineer bağımlıdırlar.

$$c_1 \cdot 1 + c_2 \cdot \sin^2 x + c_3 \cdot \cos^2 x = 0$$

$$\left.c_1 = -1 \neq 0,\ \underset{\neq 0}{c_2 = 1},\ \underset{\neq 0}{c_3 = 1}\right\} \Rightarrow -1 + \underbrace{\sin^2 x + \cos^2 x}_{1} = 0 \checkmark$$

$$\Rightarrow -1 + 1 = 0$$

$$W(1, \sin^2 x, \cos^2 x) = \begin{vmatrix} 1 & \sin^2 x & \cos^2 x \\ 0 & 2\sin x\cos x & -2\sin x\cos x \\ 0 & 2\cos 2x & -2\cos 2x \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & \sin^2 x & \cos^2 x \\ 0 & \sin 2x & -\sin 2x \\ 0 & 2\cos 2x & -2\cos 2x \end{vmatrix}$$

$$= 1 \cdot (-1)^{1+1} \cdot \begin{vmatrix} \sin 2x & -\sin 2x \\ 2\cos 2x & -2\cos 2x \end{vmatrix}$$

$$= -2\sin 2x \cos 2x + 2\sin 2x \cos 2x$$
$$= 0$$

TEOREM

$$A_0(x)y^{(n)} + A_1(x)y^{(n-1)} + \dots + A_{n-1}(x)y' + A_n(x)y = F(x) \qquad (1)$$

lineer ikinci taraflı denklem ile

$$A_0(x)y^{(n)} + A_1(x)y^{(n-1)} + \dots + A_{n-1}(x)y' + A_n(x)y = 0 \qquad (2)$$

lineer ikinci tarafsız denklem verilmiş olsun.

Burada $A_i(x)$ $(i=0,\dots,n)$ ve $F(x)$ bir I aralığında tanımlı, sürekli fonksiyonlar ve $A_0(x) \neq 0$ olsun. Bu durumda (2) denkleminin I aralığında n tane lineer bağımsız çözümü vardır. Eğer $y_1, y_2, \dots, y_n$ fonksiyonları (2) denkleminin lineer bağımsız çözümleri iseler

$$y_h = c_1y_1 + c_2y_2 + \dots + c_ny_n$$

fonksiyonu (2) denkleminin genel çözümüdür. Bundan başka verilen I aralığında (1) denkleminin de çözümleri vardır. Eğer y_0 (1) denkleminin bir çözümü ise

$y = y_h + y_ö$ fonksiyonu (1) denkleminin genel çözümü olur.

$$\boxed{y = y_h + y_ö}$$

→ ikinci taraflı denklemin genel çözümü

y_h: ikinci tarafsız denklemin genel çözümü

$y_ö$: ikinci taraflı denklemin bir çözümü

ikinci tarafsız denk = Homojen dif. denk

ikinci taraflı denk = Homojen olmayan dif. denk.

Sabit katsayılı lineer dif. denklemler

$a_0 \neq 0$, $n > 0$ tamsayı ve a_i $(i = 0, \ldots, n)$'ler sabit olmak üzere

$$a_0 y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1} y' + a_n y = f(x)$$ şeklindeki denklemlerdir.

Bu denklemlerin genel çözümü teoremde ifade edildiği gibi ikinci tarafsız (homojen) denklemin genel çözümü ile ikinci taraflı (homojen olmayan) denklemin bir çözümünün toplamına eşittir.

Sabit katsayılı ikinci tarafsız (homojen) lineer denklemler

$$a_0 y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1} y' + a_n y = 0$$

$$a_0 \frac{d^n y}{dx^n} + a_1 \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \cdots + a_{n-1} \frac{dy}{dx} + a_n y = 0 \quad \rightarrow \quad \frac{d}{dx} = D$$

$$a_0 D^n y + a_1 D^{n-1} y + \cdots + a_{n-1} D y + a_n y = 0$$

$$\underbrace{\left[a_0 D^n + a_1 D^{n-1} + \cdots + a_{n-1} D + a_n\right]}_{L(D)} \cdot y = 0$$

$L(D)\, y = 0$ denkleminin lineer bağımsız n tane $y_1, y_2, \ldots, y_n$ çözümü bilinirse genel çözümü

$c_1, c_2, \ldots, c_n$ keyfi parametreler olmak üzere

$y = c_1 y_1 + c_2 y_2 + \cdots + c_n y_n$ şeklindedir.