ii) Bu kez $f(x)$, $L_2[0,\pi]$ uzayının herhangi bir elemanı olsun. $[0,\pi]$ de tanımlı her mertebeden türeve sahip olan, 0 ve π noktalarının bir komşuluğunda sıfır olan fonksiyonların

$$\lim_{k\to\infty} \| f_k - f \|^2 = \lim_{k\to\infty} \int_0^{\pi} [f_k(x) - f(x)]^2 dx = 0$$

koşulunu sağlayan bir $\{f_k\}_1^{\infty}$ dizisinin var olduğunu biliyoruz. O halde $\{f_k\}$ fonksiyonları (4.2) ve (4.3) koşullarını da sağlar.

Böylece (i)'den dolayı

$$\|f_k\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} [a_n^{(k)}]^2 \quad (k=1,2,\dots)$$

$$a_n^{(k)} = \int_0^{\pi} f_k(x) . V_n(x)\, dx \quad (n=1,2,\dots)$$

$$|a_n - a_n^{(k)}|^2 = \left| \int_0^{\pi} f(x) . V_n(x)\, dx - \int_0^{\pi} f_k(x) . V_n(x)\, dx \right|^2 \leq \left(\int_0^{\pi} \left| (f(x) - f_k(x)) V_n(x) \right| dx \right)^2$$

Hölder'in integraller için Cauchy-Schwarz eşitsizliğinden

$$|a_n - a_n^{(k)}|^2 \leq \int_0^{\pi} [f(x) - f_k(x)]^2 dx \cdot \underbrace{\int_0^{\pi} [V_n(x)]^2 dx}_{=1} = \| f - f_k \|^2$$

$$\lim_{k\to\infty} |a_n - a_n^{(k)}| = 0 \quad \text{ya da} \quad \lim_{k\to\infty} a_n^k = a_n \quad (n=1,2,\dots)$$

$\| f_k - f_\ell \|^2$ 'ni gözönüne alalım. Yukarıdaki ispattan

$$\| f_k - f_\ell \|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} [a_n^{(k)} - a_n^{(\ell)}]^2$$

$m \in \mathbb{N}$ için

$$\sum_{n=1}^{m} [a_n^{(k)} - a_n^{(\ell)}]^2 \leq \| f_k - f_\ell \|^2$$

$$\lim_{k\to\infty} \sum_{n=1}^{m} [a_n^{(k)} - a_n^{(\ell)}]^2 \leq \lim_{k\to\infty} \| f_k - f_\ell \|^2 \Rightarrow \sum_{n=1}^{m} [a_n - a_n^{(\ell)}]^2 \leq \| f - f_\ell \|^2$$

Bu son eşitsizlikte $m \to \infty$ için limit alınırsa;

$$\lim_{m\to\infty} \sum_{n=1}^{m} [a_n - a_n^{(\ell)}]^2 \leq \| f - f_\ell \|^2 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} [a_n - a_n^{(\ell)}]^2 \leq \| f - f_\ell \|^2 \qquad (4.25)$$

(4.25) eşitsizliğinden yararlanarak,

$$\sqrt{\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2} = \sqrt{\sum_{n=1}^{\infty} [a_n - a_n^{(\ell)} + a_n^{(\ell)}]^2} \leq \sqrt{\sum_{n=1}^{\infty} (a_n - a_n^{(\ell)})^2} + \sqrt{\sum_{n=1}^{\infty} (a_n^{(\ell)})^2}$$ (Minkowski toplam eşitsizliği)

$$\leq \| f - f_\ell \| + \| f_\ell \| \qquad (4.26)$$

O halde $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$ serisi yakınsaktır.

Şimdi $\left|\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 - \sum_{n=1}^{\infty} (a_n^{(\ell)})^2\right|$ ifadesini gözönüne alalım.

$$\left|\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 - \sum_{n=1}^{\infty} (a_n^{(\ell)})^2\right| \leq \sum_{n=1}^{\infty} \left| a_n^2 - (a_n^{(\ell)})^2 \right| = \sum_{n=1}^{\infty} \left| (a_n - a_n^{(\ell)}) (a_n + a_n^{(\ell)}) \right|$$

$$\leq \sqrt{\sum_{n=1}^{\infty} (a_n - a_n^{(\ell)})^2} \sqrt{\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + a_n^{(\ell)})^2}$$

$$\Rightarrow \left|\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 - \sum_{n=1}^{\infty} (a_n^{(\ell)})^2\right| \leq \| f - f_\ell \| \left[\sqrt{\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2} + \sqrt{\sum_{n=1}^{\infty} (a_n^{(\ell)})^2} \right]$$

$$\leq \| f - f_\ell \| . \left[\| f - f_\ell \| + \| f_\ell \| + \| f_\ell \| \right]$$

$$\lim_{\ell \to \infty} \| f - f_\ell \| = 0 \Rightarrow \lim_{\ell \to \infty} \sum_{n=1}^{\infty} (a_n^{(\ell)})^2 = \sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$$

Dolayısıyla;

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 = \lim_{\ell \to \infty} \| f_\ell \|^2 = \| f \|^2 \qquad \square$$

$f(x)$, $[0,\pi]$ de sürekli bir fonksiyon olsun. Teorem 4.4'den λ, (4.1)-(4.3) probleminin özdeğeri değilse

$$y''(x) + [\lambda - q(x)]\,y(x) = f(x)$$

denkleminin (4.2)-(4.3) sınır koşullarını sağlayan bir tek çözümü vardır ve

$$y(x,\lambda) = \int_0^{\pi} G(x,t;\lambda)\, f(t)\, dt$$

$$l(y) = -y''(x) + q(x)\,y(x)$$

şeklindedir.

$$\int_0^{\pi} y(x,\lambda)\, V_n(x)\, dx = d_n(\lambda)$$

$$l(y) = \lambda y$$

olsun.

$$a_n = \int_0^{\pi} f(x) \cdot V_n(x)\, dx = \int_0^{\pi} \left[y''(x,\lambda) + [\lambda - q(x)]\, y(x,\lambda) \right] V_n(x)\, dx$$

$$= \int_0^{\pi} \left[-l(y) + \lambda y(x,\lambda) \right] \cdot V_n(x)\, dx$$

$$= -\int_0^{\pi} l(y) \cdot V_n(x)\, dx + \lambda \int_0^{\pi} y(x,\lambda) \cdot V_n(x)\, dx$$

$$= -\int_0^{\pi} y(x,\lambda) \cdot \underbrace{l(V_n(x))}_{\lambda_n V_n(x)}\, dx + \lambda \cdot d_n(\lambda)$$

$$= -\lambda_n \int_0^{\pi} y(x,\lambda) \cdot V_n(x)\,dx + \lambda d_n(\lambda)$$

$$= -\lambda_n d_n(\lambda) + \lambda d_n(\lambda)$$

$$= (\lambda - \lambda_n) d_n(\lambda) \Rightarrow \frac{a_n}{\lambda - \lambda_n} = d_n(\lambda)$$

Teorem 4.6'dan

$$y(x,\lambda) = \sum_{n=1}^{\infty} d_n(\lambda) \cdot V_n(x)$$

elde edilir. Öte yandan

$$y(x,\lambda) = \int_0^{\pi} G(x,t;\lambda) \cdot f(t)\,dt$$

olduğundan

$$\int_0^{\pi} G(x,t;\lambda)\, f(t)\,dt = \sum_{n=1}^{\infty} d_n(\lambda) \cdot V_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{\lambda - \lambda_n} V_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{V_n(x)}{\lambda - \lambda_n} \int_0^{\pi} f(t) \cdot V_n(t)\,dt$$

$$= \int_0^{\pi} \left[\sum_{n=1}^{\infty} \frac{V_n(x) \cdot V_n(t)}{\lambda - \lambda_n} \right] f(t)\,dt$$

olur.

$$\Rightarrow \int_0^{\pi} \left[G(x,t;\lambda) - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{V_n(x) \cdot V_n(t)}{\lambda - \lambda_n} \right] f(t)\, dt = 0$$

Bu eşitlik her sürekli f fonksiyonu için sağlandığından

$$G(x,t;\lambda) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{V_n(x) \cdot V_n(t)}{\lambda - \lambda_n}$$

λ yerine z kompleks değişkenini yazarsak;

$$G(x,t;z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{V_n(x) \cdot V_n(t)}{z - \lambda_n}$$

olur. Buradan;

$$\int_0^{\pi} G(x,t;z)\, dx = \int_0^{\pi} \left[\sum_{n=1}^{\infty} \frac{[V_n(x)]^2}{z - \lambda_n} \right] dx = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{z - \lambda_n} \cdot \int_0^{\pi} [V_n(x)]^2 dx$$

$$\Rightarrow \int_0^{\pi} G(x,t;z)\, dx = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{z - \lambda_n} \qquad (4.27)$$

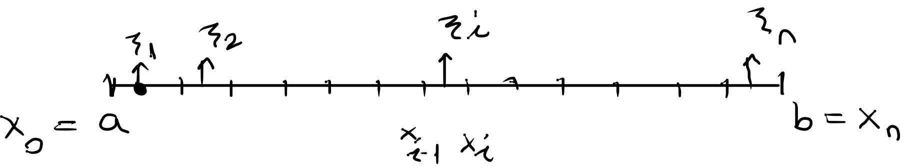
Stieltjes integrali

$$\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i).\Delta x_i$$

f ve g sonlu $[a,b]$ aralığında tanımlı, reel değerli iki fonksiyon olsun.

$a=x_0<x_1<\dots<x_n=b$ $[a,b]$'nin herhangi bir bölüntüsü ve $\xi_i\in[x_{i-1},x_i]$ $(i=1,2,\dots,n)$ olmak üzere

$$\sigma=\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i).[g(x_i)-g(x_{i-1})]$$



$$\lambda=\max_{1\le i\le n}(x_i-x_{i-1})$$ olsun.

Eğer, $\lim\limits_{\lambda\to 0}\sigma$ sonlu limiti var ve bu limit $[a,b]$'nin $a=x_0<x_1<\dots<x_n=b$ bölüntüsüne ve ξ_i noktaların seçimine bağlı değilse söz konusu limite f fonksiyonunun g fonksiyonuna göre $[a,b]$'de Stieltjes integrali denir ve

$$\int_a^b f(x).dg(x)=\lim_{\lambda\to 0}\sigma$$

şeklinde gösterilir.

Özellikleri

1- $\int_a^b [f_1(x)+f_2(x)]\,dg(x) = \int_a^b f_1(x)\,dg(x) + \int_a^b f_2(x)\,dg(x)$

2. $\int_a^b f(x)\,d[g_1(x)+g_2(x)] = \int_a^b f(x)\,dg_1(x) + \int_a^b f(x)\,dg_2(x)$

3. $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ olmak üzere $\int_a^b \lambda f(x).d[\mu g(x)] = \lambda\mu \int_a^b f(x)\,dg(x)$

4. $c \in (a,b)$ olmak üzere $\int_a^b f(x)\,dg(x) = \int_a^c f(x)\,dg(x) + \int_c^b f(x)\,dg(x)$

5. $\int_a^b f(x)\,dg(x) + \int_a^b g(x)\,df(x) = f(b)g(b) - f(a)g(a)$

Teorem 4.8

$f(x)$, $[a,b]$'de tanımlı ve sürekli bir fonksiyon olsun. $[a,b]$'de tanımlı ve $\forall x \in [a,b]$ noktasında türeve sahip g fonksiyonu için $g'(x)$ fonksiyonu $[a,b]$'de Riemann anlamında integrallenebilir ise

$$\int_a^b f(x)\,dg(x) = \int_a^b f(x).g'(x)\,dx$$ 'dir.

$N(\lambda)$, ($\lambda \in \mathbb{R}$ sb), (4.1)-(4.3) probleminin λ'dan küçük olan özdeğerlerinin sayısı olsun.

$$N(\lambda) = \sum_{\lambda_n < \lambda} 1$$

Teorem 4.9

z, (4.1)-(4.3) probleminin özdeğeri değilse o zaman

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{z-\lambda_n} = \int_{\lambda_1}^{\infty} \frac{dN(\lambda)}{z-\lambda}$$

dir.

İspat: $\lambda_n = \lambda_{n_0} < \lambda_{n_1} < \dots < \lambda_{n_m} = \lambda_{n+1}$ $\quad [\lambda_n, \lambda_{n+1}]$ aralığının bir bölüntüsü olsun.

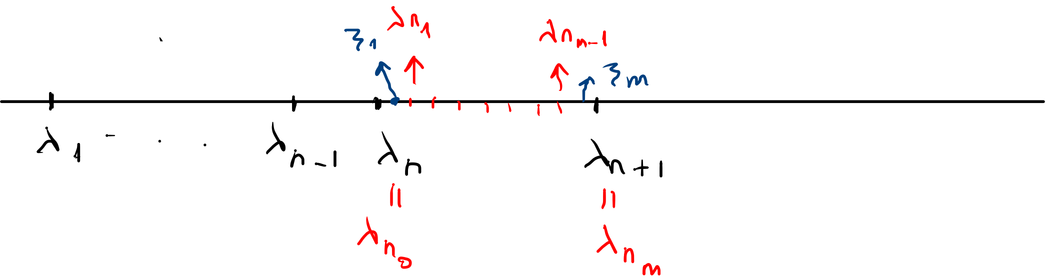
$\xi_i \in [\lambda_{n_{i-1}}, \lambda_{n_i}]$ $\quad (i=1,2,\dots,m)$ olm. üzere

$$\sigma = \sum_{i=1}^{m} \frac{N(\lambda_{n_i}) - N(\lambda_{n_{i-1}})}{z-\xi_i} \qquad \mu = \max_{1 \le i \le m} [\lambda_{n_i} - \lambda_{n_{i-1}}]$$

stieltjes integralinin tanımına göre $\displaystyle\int_{\lambda_n}^{\lambda_{n+1}} \frac{1}{z-\lambda} \cdot dN(\lambda) = \lim_{\mu \to 0} \sigma$ limitini bulalım;

$$N(\lambda_{n_i}) = \begin{cases} n & i=1,2,\dots,m \text{ ise} \\ n-1 & i=0 \text{ ise} \end{cases}$$

$\lambda_1 < \lambda_2 < \dots$ özdeğerlerinden herhangi ikisi için $[\lambda_n, \lambda_{n+1}]$ aralığının bir bölüntüsünü aldık ve λ_{n_i}'ler bölüntünün noktalarıdır.



$$N(\lambda_{n_i}) - N(\lambda_{n_{i-1}}) = \begin{cases} 0 & i=2,3,\dots,m \\ 1 & i=1 \end{cases}$$

$\xi_1 \in [\lambda_n, \lambda_{n+1}]$ (λ_{n_0}, λ_{n_1})

Tek bölüntü var.

$\mu = [\lambda_{n_1} - \lambda_n]$

$\mu \to 0 \quad \xi_1 \to \lambda_n$

$$\Rightarrow \sigma = \frac{1}{z-\xi_1} \Rightarrow \lim_{\mu \to 0} \sigma = \lim_{\mu \to 0} \frac{1}{z-\xi_1} = \frac{1}{z-\lambda_n}$$

$$\Rightarrow \int_{\lambda_n}^{\lambda_{n+1}} \frac{dN(\lambda)}{z-\lambda} = \frac{1}{z-\lambda_n} \Rightarrow \int_{\lambda_1}^{\infty} \frac{dN(\lambda)}{z-\lambda} = \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} - + \int_{\lambda_2}^{\lambda_3} + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} \left[\int_{\lambda_n}^{\lambda_{n+1}} \frac{dN(\lambda)}{z-\lambda} \right] = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{z-\lambda_n} \quad (4.28)$$

(4.27) ve (4.28)'den

$$\boxed{\int_0^{\pi} G(x,t;z)\,dx = \int_{\lambda_1}^{\infty} \frac{dN(\lambda)}{z-\lambda}}$$

Carleman formülü

Uygulama

1. $\left.\begin{array}{l} y'' + 3y = 5\sin 3x + 2\sin 8x \\ y(0) = 0 \, , \; y(\pi) = 0 \end{array}\right\}$ sınır değer probleminin çözümü için bir özfonksiyon açılımı elde ediniz.

$\left.\begin{array}{l} y'' + \lambda y = 0 \\ y(0) = 0 \\ y(\pi) = 0 \end{array}\right\}$ Sturm-Liouville problemini gözönüne alırsak.

K.D: $r^2 + \lambda = 0$

1°) $\lambda < 0 \Rightarrow \lambda = -\mu^2 \Rightarrow r^2 - \mu^2 = 0 \Rightarrow r^2 = \mu^2 \Rightarrow r = \mp\mu \quad y = c_1 e^{-\mu x} + c_2 e^{\mu x}$

$y(0) = 0 \Rightarrow c_1 + c_2 = 0 \quad c_1 = -c_2$

$y(\pi) = 0 \Rightarrow c_1 e^{-\mu\pi} + c_2 e^{\mu\pi} = 0$

$c_2 [\underbrace{e^{\mu\pi} - e^{-\mu\pi}}_{\neq 0}] = 0 \Rightarrow c_2 = 0$

2°) $\lambda = 0 \Rightarrow r^2 = 0 \Rightarrow r_{1,2} = 0 \Rightarrow y = Ax + B$

$y(0) = 0 \Rightarrow B = 0$

$y(\pi) = 0 \Rightarrow A\pi = 0 \Rightarrow A = 0$

3°) $\lambda > 0 \Rightarrow \lambda = \mu^2 \Rightarrow r^2 + \mu^2 = 0 \Rightarrow r^2 = -\mu^2 \Rightarrow r = \mp\mu i \quad y = c_3 \cos\mu x + c_4 \sin\mu x$

$y(0) = 0 \Rightarrow 0 = c_3 \Rightarrow y = c_4 \sin\mu x$

$y(\pi) = 0 \Rightarrow c_4 \sin\mu\pi = 0 \Rightarrow \sin\mu\pi = 0 \Rightarrow \mu\pi = n\pi \Rightarrow \mu = n \Rightarrow \lambda = n^2 \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$

$\phi_n(x) = \sin nx$

Verilen denklemde $\lambda = 3$'tür ve bir özdeğer değildir. Dolayısıyla problemin tek çözümü vardır.

$$y = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \sin nx$$

şeklinde bir çözümü arayalım.

$$y' = \sum_{n=1}^{\infty} c_n . n . \cos nx$$

$$y'' = \sum_{n=1}^{\infty} -n^2 c_n \sin nx$$

$$y'' + 3y = \sum_{n=1}^{\infty} -n^2 c_n \sin nx + 3\sum_{n=1}^{\infty} c_n \sin nx = 5\sin 3x + 2\sin 8x$$

$$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} (3-n^2)\, c_n \sin nx = 5\sin 3x + 2\sin 8x$$

$$-6c_3 = 5 \qquad -61c_8 = 2 \Rightarrow c_3 = \frac{-5}{6}, \quad c_8 = \frac{-2}{61}$$

$$\Rightarrow y = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \sin nx = \frac{-5}{6}\sin 3x - \frac{2}{61}\sin 8x$$

2) $(xy')' + \frac{y}{x} = \frac{1}{x}$ $\quad (1<x<e)$
$y' + xy'' + \frac{y}{x} = \frac{1}{x}$
$y(1) = 0 \quad y(e) = 0$

} sınır değer probleminin çözümü için bir özfonksiyon açılımı elde ediniz.

$(xy')' + \frac{y}{\cancel{x}} + \lambda r y = 0$ $\quad r = \frac{1}{x}$ alalım.

$y(1) = 0 \quad y(e) = 0$

$x = 1 \Rightarrow t = 0$

$x = e \Rightarrow t = 1$

$y' + xy'' + \frac{y}{x} + \frac{\lambda y}{x} = 0$

$x^2 y'' + xy' + (\lambda+1) y = 0$ (Cauchy-Euler)

$y(0) = 0$

$y(1) = 0$

$x = e^t$
$y' = e^{-t} Dy$
$y'' = e^{-2t} D(D-1) y$

$\underbrace{e^{2t} e^{-2t}}_{1} D(D-1)y + \underbrace{e^{t} e^{-t}}_{1} Dy + (\lambda+1) y = 0$

$\left[D^2 - \cancel{D} + \cancel{D} + (\lambda+1)\right] y = 0$

$\left[D^2 + (\lambda+1)\right] y = 0 \Rightarrow y'' + (\lambda+1) y = 0$ $\quad \lambda+1 < 0 \Rightarrow \lambda+1 = -\mu^2$

k.D: $r^2 - \mu^2 = 0 \Rightarrow r = \mp\mu \Rightarrow y = c_1 e^{-\mu t} + c_2 e^{\mu t}$

$y(0) = 0 \Rightarrow c_1 + c_2 = 0 \Rightarrow c_1 = -c_2$

$y(1) = 0 \Rightarrow c_1 e^{-\mu} + c_2 e^{\mu} = 0 \Rightarrow c_2 = 0$

- $\lambda+1=0 \Rightarrow r^2=0 \Rightarrow r_{1,2}=0 \Rightarrow y=At+B$ $\quad y(0)=0 \Rightarrow B=0$ $\quad x=e^t \Rightarrow t=\ln x$

$y(1)=0 \Rightarrow A=0$

- $\lambda+1>0 \Rightarrow \lambda+1=\mu^2 \Rightarrow r^2+\mu^2=0 \Rightarrow r^2=-\mu^2 \Rightarrow r_{1,2}=\mp\mu i \Rightarrow y=C_3\cos\mu t+C_4\sin\mu t$

$y(0)=0 \Rightarrow \quad C_3=0$

$y(1)=0 \Rightarrow \quad C_4\sin\mu=0 \Rightarrow \sin\mu=0 \Rightarrow \mu=n\pi \quad (n=1,2,\ldots)$

$\lambda+1=\mu^2 \Rightarrow \lambda+1=n^2\pi^2 \Rightarrow \lambda=n^2\pi^2-1 \quad (n=1,2,\ldots)$

$y=C_4\sin(\sqrt{\lambda+1}\,\ln x)=C_4\sin(n\pi\ln x)$

$$y=\sum_{n=1}^{\infty} c_n\cdot\sin(n\pi\ln x)$$

$$y'=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n\pi}{x}c_n\cos(n\pi\ln x)$$

$$y''=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{-n\pi}{x^2}c_n\cos(n\pi\ln x)-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2\pi^2}{x^2}c_n\sin(n\pi\ln x)$$

$$y' + xy'' + \frac{y}{x} = \frac{1}{x}$$

$$\Rightarrow x \cdot \left[\sum_{n=1}^{\infty} c_n \left(\frac{-n\pi}{x^2} \cos(n\pi \ln x) - \frac{n^2\pi^2}{x^2} \sin(n\pi \ln x) \right) \right] + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n\pi}{x} c_n \cos(n\pi \ln x) + \frac{1}{x} \sum_{n=1}^{\infty} c_n \sin(n\pi \ln x) = \frac{1}{x}$$

$$\cancel{\sum_{n=1}^{\infty} - c_n \cdot \left(\frac{n\pi}{x}\right) \cos(n\pi \ln x)} - \sum_{n=1}^{\infty} c_n \left(\frac{n^2\pi^2}{x}\right) \sin(n\pi \ln x) + \cancel{\sum_{n=1}^{\infty} c_n \left(\frac{n\pi}{x}\right) \cos(n\pi \ln x)} + \sum_{n=1}^{\infty} c_n \left(\frac{1}{x}\right) \sin(n\pi \ln x) = \frac{1}{x}$$

$$\frac{1}{x} \sum_{n=1}^{\infty} c_n (1 - n^2\pi^2) \sin(n\pi \ln x) = \frac{1}{x}$$

Eşitliğin her tarafını $\sin(m\pi \ln x)$ ile çarpıp 1'den e'ye integre edelim.

$$\ln x = u \rightarrow \frac{dx}{x} = du$$

$$x = 1 \Rightarrow u = 0 \ , \ x = e \Rightarrow u = 1$$

$$\int_1^e \frac{(1 - m^2\pi^2) \cdot c_m \cdot \sin^2(m\pi \ln x)}{x} dx = \int_1^e \frac{1}{x} \cdot \sin(m\pi \ln x) dx$$

$$\int_1^e \frac{\sin^2(m\pi \ln x)}{x} dx$$

$$\int_0^1 \sin^2(m\pi u) du$$

$$\int_0^1 \left(\frac{1 - \cos 2m\pi u}{2} \right) du$$

$$\frac{u}{2} - \frac{1}{4m\pi} \sin 2m\pi u \Big|_0^1 = \frac{1}{2}$$

$$\frac{(1 - m^2\pi^2)}{2} \cdot c_m = \int_0^1 \sin(m\pi u) \cdot du$$

$$\frac{(1 - m^2\pi^2)}{2} \cdot c_m = \frac{-1}{m\pi} \cos(m\pi u) \Big|_0^1 = \frac{-1}{m\pi} (\cos m\pi - 1) = \begin{cases} 0 & m = 2n \text{ ise} \\ \frac{2}{m\pi} & m = (2n+1) \text{ ise} \end{cases}$$

$$(1 - m^2\pi^2) \cdot c_m = \frac{2 \cdot [1 - (-1)^m]}{m\pi} \Rightarrow c_m = \frac{2 \cdot [1 - (-1)^m]}{(m\pi) \cdot [1 - m^2\pi^2]}$$

$$y = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2 \cdot \left[1-(-1)^n\right]}{n\pi\left[1-n^2\pi^2\right]} \cdot \sin(n\pi \ln x)$$