$\int \sin ax \cdot \cos bx \, dx$, $\int \sin ax \cdot \sin bx \, dx$, $\int \cos ax \cdot \cos bx \, dx$ şeklindeki integraller

$\cos(a+b) = \cos a \cdot \cos b - \sin a \cdot \sin b$

$\cos(a-b) = \cos a \cdot \cos b + \sin a \sin b$

$\cos a \cdot \cos b = \frac{1}{2}\left[\cos(a+b) + \cos(a-b)\right]$

$\sin a \cdot \sin b = \frac{1}{2}\left[\cos(a-b) - \cos(a+b)\right]$

$\sin(a+b) = \sin a \cdot \cos b + \sin b \cdot \cos a$

$\sin(a-b) = \sin a \cos b - \sin b \cos a$

$\sin a \cdot \cos b = \frac{1}{2}\left[\sin(a+b) + \sin(a-b)\right]$

$\sin(x+x) = \sin x \cos x + \cos x \sin x$

$\cos(x+x) = \cos x \cos x - \sin x \sin x$

Örnekler

1) $\int \sin 3x \cdot \cos 5x \, dx = \int \frac{1}{2}\left[\sin(3x+5x) + \sin(3x-5x)\right] dx = \frac{1}{2}\int \sin 8x \, dx - \frac{1}{2}\int \sin 2x \, dx$

$= -\frac{1}{16}\cos 8x + \frac{1}{4}\cos 2x + C$

2) $\int \sin x \cdot \sin 2x \, dx = \int \frac{1}{2}\left[\cos(x-2x) - \cos(x+2x)\right] dx = \frac{1}{2}\int \cos x \, dx - \frac{1}{2}\int \cos 3x \, dx$

$= \frac{1}{2}\sin x - \frac{1}{6}\sin 3x + C$

3) $\int \cos 3x \cdot \cos x \, dx = \int \frac{1}{2}\left[\cos(3x+x) + \cos(3x-x)\right] dx = \frac{1}{2}\int \cos 4x \, dx + \frac{1}{2}\int \cos 2x \, dx$

$= \frac{1}{8}\sin 4x + \frac{1}{4}\sin 2x + C$

Kısmi integrasyon

$u(x)$ ve $v(x)$ türevlenebilir iki fonksiyon olsun.

$$\frac{d}{dx}(u.v) = \frac{du}{dx}.v + u.\frac{dv}{dx}$$ dir. Bu denklemin her iki tarafını integre edelim,

$$\int \frac{d}{\cancel{dx}}(u.v)\,\cancel{dx} = \int \frac{du}{\cancel{dx}}.v\,\cancel{dx} + \int u.\frac{dv}{\cancel{dx}}.\cancel{dx}$$

$$\int d(uv) = \int du.v + \int u\,dv$$

Amaç bu dönüşümleri doğru uygulamak.

$$u.v = \int v\,du + \int u\,dv \Rightarrow$$

Düzenleme yapılırsa $\Rightarrow$ $$\boxed{\underbrace{\int u\,dv}_{\text{verilen integral.}} = u.v - \underbrace{\int v\,du}_{\text{daha basit olan integral.}}}$$ → kısmi integrasyon formülü

formülünü elde ederiz. Bu yöntemde amaç $\int u\,dv$ integralini daha basit olan $\int v\,du$ integrali ile değiştirmektir. Bunun için u ve dv'yi uygun olarak seçmek önemlidir. Bu seçim için vereceğimiz iki kural kolaylık sağlayacaktır ancak yine de kesin garanti vermez.

1) Eğer integre edilen fonksiyon bir üstel, bir sinüs veya kosinüs, bir sinüshiperbolik veya kosinüshiperbolik, veya başka kolayca integre edilebilen bir fonksiyonla polinom çarpımından oluşuyorsa, polinoma u ve integralde geri kalan ifadeye dv dönüşümü yapılarak kısmi integrasyon formülü uygulanır.

$$\int \underbrace{x}_{u} \cdot \underbrace{\left\{ \begin{array}{l} \text{üstel fonksiyon} \\ \text{sinüs veya kosinüs} \\ \text{sinh veya cosh} \\ \text{kolayca integre edilebilin bir fonksiyon} \end{array} \right. \quad dx}_{dv}$$

LAPTÜ

- L → Logaritma
- A → Ters Trig. / Ters Hip.
- P → polinom
- T → Trigonometrik / Hiperbolik
- Ü → üstel

2) Eğer integre edilen fonksiyon bir logaritma, bir ters trigonometrik, bir ters hiperbolik veya türevi kolayca bulunabilen fakat kolayca integre edilemeyen bir fonksiyon içeriyorsa o zaman bu fonksiyona u, integralde geri kalan ifadeye dv dönüşümü yapılarak kısmi int. formülü uygulanır.

$$\int \left. \begin{array}{l} \text{logaritma} \\ \text{Ters trigonometrik} \\ \text{Ters hiperbolik} \\ \underbrace{\text{Kolayca türetilebilen fakat integre edilemeyen}}_{u} \end{array} \right\} \cdot \underbrace{x \ dx}_{dv}$$

Örnekler

1) $\int \underbrace{x}_{u} \cdot \underbrace{e^x\,dx}_{dv} = xe^x - \int e^x\,dx = xe^x - e^x + C$

$x = u \Rightarrow dx = du$

$\int e^x\,dx = \int dv \Rightarrow e^x = v$

2) $\int \underbrace{x^2}_{u}\underbrace{\sin x\,dx}_{dv} = -x^2\cos x + 2\int x\cos x\,dx = -x^2\cos x + 2\left[x\sin x - \int \sin x\,dx\right]$

$= -x^2\cos x + 2x\sin x + 2\cos x + C$

$x^2 = u \Rightarrow 2x\,dx = du$

$\int \sin x\,dx = \int dv \Rightarrow -\cos x = v$

$x = u \Rightarrow dx = du$

$\cos x\,dx = dv \Rightarrow \sin x = v$

3) $\int \arcsin x\,dx = x\arcsin x - \underbrace{\int \frac{x\,dx}{\sqrt{1-x^2}}}_{} = x\arcsin x - \int \frac{\frac{-du}{2}}{\sqrt{u}}$

$= x\arcsin x + \sqrt{u} + C$

$= x\arcsin x + \sqrt{1-x^2} + C$

$\arcsin x = u$

$\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = du$

$\int dx = \int dv$

$x = v$

$1 - x^2 = u$

$-2x\,dx = du$

$x\,dx = \frac{-du}{2}$

4) $\int \overbrace{x}^{dv} \cdot \underbrace{\ln x}_{u}\, dx = \frac{x^2}{2}\ln x - \int \frac{x^2}{2}\cdot\frac{dx}{x}$

$\ln x = u$

$\frac{dx}{x} = du$

$\int x\, dx = \int dv$

$\frac{x^2}{2} = v$

$= \frac{x^2}{2}\ln x - \frac{1}{2}\int x\, dx$

$= \frac{x^2}{2}\ln x - \frac{x^2}{4} + C$

NOT: Aşağıdaki iki örnek, kısmi integrasyon sonucunda sıkça karşılaşılan bir durumu gösterir. Bu durum orjinal integralin eşitliğin sağ tarafında tekrar gözükmesi durumudur.

Ör/1 $I = \int \underbrace{e^x}_{u} \cdot \underbrace{\cos 2x\, dx}_{dv} = \frac{e^x}{2}\sin 2x - \frac{1}{2}\int e^x \sin 2x\, dx$

$= \frac{e^x}{2}\sin 2x - \frac{1}{2}\left[-\frac{e^x}{2}\cos 2x + \frac{1}{2}\int e^x \cos 2x\, dx\right]$

- $e^x = u \Rightarrow e^x dx = du$

$\int \cos 2x\, dx = \int dv \Rightarrow \frac{1}{2}\sin 2x = v$

- $e^x = u \Rightarrow e^x dx = du$

$\int \sin 2x\, dx = \int dv \Rightarrow -\frac{1}{2}\cos 2x = v$

$\Rightarrow I = \frac{e^x}{2}\sin 2x + \frac{e^x}{4}\cos 2x - \frac{1}{4}\underbrace{\int e^x \cos 2x\, dx}_{I}$

$\Rightarrow \left(1+\frac{1}{4}\right) I = \frac{e^x}{4}\left[2\sin 2x + \cos 2x\right]$

$I = \frac{e^x}{5}\left[2\sin 2x + \cos 2x\right] + C$

Ör/2 $I=\int \sec^3 x\,dx = \int \underbrace{\sec x}_{u}.\underbrace{\sec^2 x\,dx}_{dv} = \sec x.\tan x - \int \sec x.\tan^2 x\,dx$

$= \sec x.\tan x - \int \sec x(\sec^2 x - 1)\,dx$

$= \sec x.\tan x - \underbrace{\int \sec^3 x\,dx}_{I} + \int \sec x\,dx$

$\sec x = u \Rightarrow \sec x.\tan x\,dx = du$

$\int \sec^2 x\,dx = \int dv \Rightarrow \tan x = v$

$\Rightarrow 2I = \sec x.\tan x + \ln|\sec x + \tan x|$

$\Rightarrow I = \frac{1}{2}\sec x\tan x + \frac{1}{2}\ln|\sec x + \tan x| + C$

Belirli integralde kısmi integrasyon

Ör/ $\int_1^e \overbrace{x^3.\underbrace{(\ln x)^2}_{u}}^{dv}\,dx = \frac{x^4}{4}(\ln x)^2\Big|_1^e - \int_1^e 2\frac{\ln x}{\cancel{x}}.\frac{x^{\cancel{4}\,3}}{\cancel{4}\,2}\,dx = \left[\frac{e^4}{4}.(\ln e)^2 - \cancel{\frac{1}{4}(\ln 1)^2}\right] - \frac{1}{2}\int_1^e x^3\ln x\,dx$

$(\ln x)^2 = u \Rightarrow 2\frac{\ln x}{x}dx = du$

$x^3 dx = dv \Rightarrow \frac{x^4}{4} = v$

$\ln x = u \Rightarrow \frac{dx}{x} = du$

$x^3 dx = dv \Rightarrow \frac{x^4}{4} = v$

$= \frac{e^4}{4} - \frac{1}{2}\left[\frac{x^4}{4}\ln x\Big|_1^e - \int_1^e \frac{x^4}{4}.\frac{dx}{x}\right]$

$= \frac{e^4}{4} - \frac{1}{2}\left[\left(\frac{e^4}{4}\cancel{\ln e} - \frac{1}{4}\cancel{\ln 1}\right) - \frac{1}{4}\int_1^e x^3 dx\right]$

$= \frac{e^4}{4} - \frac{e^4}{8} - \frac{1}{4}.\frac{x^4}{4}\Big|_1^e$

$= \frac{e^4}{8} - \frac{1}{16}(e^4 - 1) = \frac{e^4}{16} + \frac{1}{16}$

İndirgeme formülleri

$$I_0 = \int e^{-x}\,dx = -e^{-x}$$

Ör/ $\int x^4 e^{-x}\,dx = I_4$

$$I_n = \int \underbrace{x^n}_{u} \cdot \underbrace{e^{-x}\,dx}_{dv} = -x^n e^{-x} + \int n \cdot x^{n-1} \cdot e^{-x} \Rightarrow I_n = -x^n e^{-x} + n \underbrace{\int x^{n-1} e^{-x}}_{I_{n-1}} \Rightarrow \boxed{I_n = -x^n e^{-x} + n I_{n-1}}$$

$x^n = u \Rightarrow n x^{n-1}\,dx = du$

$e^{-x}\,dx = dv \Rightarrow -e^{-x} = v$

$$\Rightarrow I_4 = -x^4 e^{-x} + 4 I_3 = -x^4 e^{-x} + 4\left[-x^3 e^{-x} + 3 I_2\right]$$

$$= -x^4 e^{-x} - 4x^3 e^{-x} + 12\left(-x^2 e^{-x} + 2 I_1\right)$$

$$= -x^4 e^{-x} - 4x^3 e^{-x} - 12x^2 e^{-x} + 24\left[-x e^{-x} + I_0\right]$$

$$= -x^4 e^{-x} - 4x^3 e^{-x} - 12x^2 e^{-x} - 24x e^{-x} - 24 e^{-x} + C$$

$\int x^4 e^{-x}\,dx$ İNT. $g(x) = e^{-x}$

Türev				
$f(x) = x^4$	$\xrightarrow{+}$	$-e^{-x}$	$\longrightarrow$	$-x^4 e^{-x}$
$4x^3$	$\xrightarrow{-}$	e^{-x}	$\longrightarrow$	$-4x^3 e^{-x}$
$12x^2$	$\xrightarrow{+}$	$-e^{-x}$	$\longrightarrow$	$-12x^2 e^{-x}$
$24x$	$\xrightarrow{-}$	e^{-x}	$\longrightarrow$	$-24x e^{-x}$
24	$\xrightarrow{+}$	$-e^{-x}$	$\longrightarrow$	$-24 e^{-x}$
0				

Ör/ $I_n = \int_0^{\pi/2} \cos^n x \, dx$, $(n = 0, 1, 2, \ldots)$ integralini hesaplamak için bir indirgeme formülü bulunuz.

$$I_n = \int_0^{\pi/2} \overbrace{\cos x \cdot \underbrace{\cos^{n-1} x}_{u} \; dx}^{dv} = \sin x \cdot \cos^{n-1} x \Big|_0^{\pi/2} + \int_0^{\pi/2} (n-1) \cdot \cos^{n-2} x \cdot \sin^2 x \, dx$$

$\cos^{n-1} x = u$

$(n-1) \cdot \cos^{n-2} x \cdot (-\sin x) \cdot dx = du$

$\cos x \, dx = dv$

$\sin x = v$

$$= \left(\sin\frac{\pi}{2} \cdot \cancel{\cos^{n-1}\frac{\pi}{2}}^{0} - \cancel{\sin 0}^{0} \cdot \cos^{n-1} 0\right) + (n-1) \int_0^{\pi/2} \cos^{n-2} x \cdot (1 - \cos^2 x) dx$$

$$= (n-1) \int_0^{\pi/2} \cos^{n-2} x \, dx - (n-1) \int_0^{\pi/2} \cos^n x \, dx$$

$$\Rightarrow I_n = (n-1) I_{n-2} - (n-1) I_n$$

$$\Rightarrow n I_n = (n-1) I_{n-2} \Rightarrow \boxed{I_n = \frac{n-1}{n} I_{n-2}} \qquad n \geq 2$$

$$I_1 = \int_0^{\pi/2} \cos x \, dx = \sin x \Big|_0^{\pi/2} = 1$$

$$I_0 = \int_0^{\pi/2} dx = x \Big|_0^{\pi/2} = \frac{\pi}{2}$$

$$I_5 = \frac{4}{5} I_3 = \frac{4}{5} \cdot \frac{2}{3} I_1 = \frac{4}{5} \cdot \frac{2}{3} \cdot 1$$

$$I_6 = \frac{5}{6} I_4 = \frac{5}{6} \cdot \frac{3}{4} I_2 = \frac{5}{6} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2} \cdot I_0$$

$$= \frac{5}{6} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{2}$$