

Reel sayı dizilerinin yakınsaklık kriterleri

$\mathbb{R}$ içindeki bir dizinin yakınsadığı noktayı (veya limitini) bilmeden de aşağıdaki kriterler yardımıyla bir dizinin yakınsaklık karakteri incelenebilir.

Teorem 16. (a) Monoton artan ve üstten sınırlı her (x_n) dizisi yakınsaktır ve $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \sup R(x_n)$ dir. Ayrıca,

monoton artan (x_n) dizisi üstten sınırsız ise, $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \infty$ dur.

(b) Monoton azalan ve alttan sınırlı her (x_n) dizisi yakınsaktır ve $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \inf R(x_n)$ dir. Ayrıca mono-

ton azalan (x_n) dizisi alttan sınırsız ise, $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = -\infty$ dur.

(c) Bir reel sayı dizisinin yakınsak olması için gerek ve yeter koşul onun bir Cauchy dizisi olmasıdır.

ör/ $x_1 = 0$, $x_{n+1} = \sqrt{2+x_n}$ $n \in \mathbb{N}$ şeklinde tanımlanan (x_n) dizisinin yakınsaklığını gösterip limitini bulunuz.

$$\text{Her } n \in \mathbb{N} \text{ için } x_{n+1}^2 = 2 + x_n, \quad x_{n+2}^2 = 2 + x_{n+1}$$

$$\text{olduğundan,} \quad x_{n+2}^2 - x_{n+1}^2 = x_{n+1} - x_n \quad (4)$$

elde edilir.

Verilen (x_n) dizisinin artan olduğunu gösterelim.

$x_2 = \sqrt{2+x_1} = \sqrt{2} > x_1 = 0$ olduğu açıktır. Herhangi

$k \in \mathbb{N}$ için $x_{k+1} > x_k$ olduğunu farz edelim. O halde

(4)'ten $x_{k+2}^2 > x_{k+1}^2$ olur ve buradan da $x_{k+1} > 0$

$x_{k+2} > 0$ olduğu dikkate alınırsa $x_{k+2} > x_{k+1}$ eşit-

sizliğinin doğruluğu görülür. O halde Tümevarım yöntemi-
mine göre (x_n) dizisi artandır.

Şimdi (x_n) dizisinin üstten sınırlı olduğunu gösterelim.

$\forall n \in \mathbb{N}$ için $x_n \geq 0$ ve $x_n^2 < x_{n+1}^2 = 2 + x_n$ veya

$x_n^2 - x_n - 2 < 0$ olduğundan, $x_n < 2$ olur. Bu

ise (x_n) 'in üstten sınırlı olması demektir.

Verilen (x_n) ($n \in \mathbb{N}$) dizisi artan ve üstten sınırlı olduğundan yakınsaktır.

$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$ diyelim. $\forall n \in \mathbb{N}$ için $x_n \geq 0$ olduğundan $a \geq 0$ dir. Her $n \in \mathbb{N}$ için doğru olan $x_{n+1}^2 = 2 + x_n$ eşitliğinde $n \rightarrow \infty$ iken limit alınırse o zaman

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} x_{n+1} = a \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} x_{n+1}^2 = \left(\lim_{n \rightarrow \infty} x_{n+1} \right)^2 = a^2$$

olduğu dikkate alındığında $a^2 = 2 + a$ veya $a^2 - a - 2 = 0$ bulunur. Buradan da $a = 2$ olduğu ve dolayısıyla $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 2$ elde edilir.

Ör $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ limitinin varlığını ispat ediniz.

Çözüm:

$x_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$, $n \in \mathbb{N}$ olmak üzere $\forall \alpha > -1$ için

doğru olan $(1 + \alpha)^n \geq 1 + n\alpha$ $n \in \mathbb{N}$ Bernoulli eşitsizliğinden yararlanırsak

$$\frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{\left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n+1}}{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n} = \frac{\left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^n}{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n} \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)$$

$$\begin{aligned} (1 + \alpha)^n &\geq 1 + n\alpha \\ &= \frac{\left(\frac{n+2}{n+1}\right)^n}{\left(\frac{n+1}{n}\right)^n} \left(\frac{n+2}{n+1}\right) \\ &= \left(\frac{n(n+2)}{(n+1)^2}\right)^n \left(\frac{n+2}{n+1}\right) \end{aligned}$$

$$= \left(1 - \frac{1}{(n+1)^2}\right)^n \left(\frac{n+2}{n+1}\right) > \left(1 - \frac{n}{(n+1)^2}\right) \frac{n+2}{n+1}$$

$$= \frac{(n^2+n+1)(n+2)}{(n^2+2n+1)(n+1)} > 1 \Rightarrow x_{n+1} > x_n$$

olur. Demek ki (x_n) dizisi artandır.

Şimdi (x_n) dizisinin üstten sınırlı olduğunu görelim. Binom formülünden faydalananarak

$$x_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \binom{n}{0} 1^n + \binom{n}{1} \frac{1}{n} + \binom{n}{2} \frac{1}{n^2} + \dots + \binom{n}{n} \frac{1}{n^n}$$

$$= 1 + 1 + \frac{1}{2!} \left(1 - \frac{1}{n}\right) + \frac{1}{3!} \left(1 - \frac{1}{n}\right) \left(1 - \frac{2}{n}\right) + \dots +$$

$$+ \frac{1}{n!} \left(1 - \frac{1}{n}\right) \dots \left(1 - \frac{n-1}{n}\right)$$

$$< 2 + \frac{1}{2!} + \dots + \frac{1}{n!} = y_n$$

bulunur. $\forall n \in \mathbb{N}$ için $n! \geq 2^{n-1}$ olduğundan

$$y_n < 2 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{2^{n-1}} = 2 + \frac{\frac{1}{2} - \left(\frac{1}{2}\right)^n}{1 - \frac{1}{2}}$$

$$= 3 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} < 3$$

elde edilir. Buradan, $\forall n \in \mathbb{N}$ için $x_n < 3$ dür. Yani (x_n) dizisinin üstten sınırlı olduğu görülür. O halde, (x_n) dizisi yakınsaktır. Ayrıca $\forall n \in \mathbb{N}$ için $2 < x_n < 3$ olduğundan, (x_n) dizisinin limiti 2 ile 3 arasında bir

reel sayıdır. Bu sayı 'e' ile gösterilir ve değeri yaklaşık olarak $e = 2,718281828459045 \dots$ dir. Şu halde

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e \text{ dir.}$$

NOT. $\mathbb{R}$ içindeki bir (x_n) dizisinin bir Cauchy dizisi olup olmayacağı tanımlarını aşağıdaki şekilde de verebiliriz.

- (x_n) bir Cauchy dizisidir $\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0$ için $\exists n_\varepsilon \in \mathbb{N}$

öyle ki $\forall n > n_\varepsilon$ ve $\forall p \in \mathbb{N}$ için $|x_{n+p} - x_n| < \varepsilon$ dir.

- (x_n) bir Cauchy dizisi değildir $\Leftrightarrow \exists \varepsilon > 0, \forall N \in \mathbb{N}$ için $\exists n > N$ ve $\exists p \in \mathbb{N}$ öyle ki $|x_{n+p} - x_n| \geq \varepsilon$ dir.

Ör $a \in \mathbb{R}$ için $x_n = \frac{\sin a}{2} + \frac{\sin 2a}{2^2} + \frac{\sin 3a}{2^3} + \dots + \frac{\sin na}{2^n}$,

$n \in \mathbb{N}$ dizisinin yakınsak olduğunu gösteriniz.

Çözüm.

$\forall n, p \in \mathbb{N}$ olmak üzere

$$|x_{n+p} - x_n| = \left| \frac{\sin(n+1)a}{2^{n+1}} + \dots + \frac{\sin(n+p)a}{2^{n+p}} \right|$$

$$\leq \frac{1}{2^{n+1}} + \dots + \frac{1}{2^{n+p}} = \frac{1}{2^{n+1}} \left[1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{2^{p-1}} \right]$$

$$= \frac{1}{2^{n+1}} \frac{1 - \frac{1}{2^p}}{1 - \frac{1}{2}} = \frac{1}{2^n} \left(1 - \frac{1}{2^p} \right) < \frac{1}{2^n}$$

bulunur. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2^n} = 0$ olduğundan, herhangi $\varepsilon > 0$

verildiğinde $\forall n > n_\varepsilon = \left\lceil \log_2 \frac{1}{\varepsilon} \right\rceil$ için $\frac{1}{2^n} < \varepsilon$ olur.

Bu durumda, $\forall n > n_\varepsilon$ ve $\forall p \in \mathbb{N}$ için $|x_{n+p} - x_n| < \varepsilon$

$\Rightarrow (x_n)$ bir Cauchy dizisidir $\Rightarrow (x_n)$ dizisi yakınsaktır.

Reel Sayı Dizilerinin Alt ve Üst Limitleri

Tanım 56. (x_{n_k}) , (x_n) dizisinin bir alt dizisi olsun. Eğer,

$\lim_{n \rightarrow \infty} x_{n_k} = a$ ($a \in \mathbb{R}$, $a = +\infty$ veya $a = -\infty$ olabilir) ise,

a , (x_n) dizisinin bir Limit noktasıdır denir. Bir başka ifade ile, eğer, $a \in \overline{\mathbb{R}}$ noktasının her $U_\varepsilon(a)$ komşuluğunda (x_n) dizisinin sonsuz sayıda terimi bulunuyorsa, a ya (x_n) dizisinin bir Limit noktası denir.

Her ne kadar adlarında benzerlik olsa da, bir dizinin limit noktası ile dizinin limitini birbirleriyle karıştırmamalıyız. Bununla ilgili aşağıdaki teoremleri verelim.

Teorem 12.

Eğer, (x_n) dizisinin limiti a ise ($a \in \mathbb{R}$, $a = -\infty$ veya $a = +\infty$ olabilir), (x_n) dizisinin her (x_{n_k}) alt dizisinin de limiti a 'dır. Yani

$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a \in \overline{\mathbb{R}}$ ($\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$) $\Leftrightarrow (x_n)$ 'nin her (x_{n_k})

alt dizisi için $\lim_{n \rightarrow \infty} x_{n_k} = a$ 'dır.

Bu teoremden de görüldüğü gibi Limiti (sonlu veya sonsuz) olan bir dizinin yalnızca bir limit noktası vardır ki, bu da dizinin limitinden başkası değildir.

Teorem 18.

Her reel sayı dizisinin $\overline{\mathbb{R}}$ 'de en az bir limit noktası vardır.

Teorem 19. (Bolzano-Weierstrass)

$\mathbb{R}$ içindeki her sınırlı dizinin yakınsak bir alt dizisi vardır.

Tanım 57. $\mathbb{R}$ içinde bir dizi (x_n) ve $Z = \{x \in \mathbb{R} : x, (x_n) \text{ 'nin bir limit noktasıdır}\}$ olsun. (Teorem 18'e göre $Z \neq \emptyset$ dir) $L = \sup Z$ ve $l = \inf Z$ büyüklüklerine, sırası ile (x_n) dizisinin üst limiti ve alt limiti denir ve

$$L = \overline{\lim_{n \rightarrow \infty} x_n} \quad \text{veya} \quad L = \limsup x_n$$

$$l = \underline{\lim_{n \rightarrow \infty} x_n} \quad \text{veya} \quad l = \liminf x_n$$

ile gösterilir.

Her (x_n) dizisi için $l \leq L$ (veya $\underline{\lim_{n \rightarrow \infty} x_n} \leq \overline{\lim_{n \rightarrow \infty} x_n}$) olduğu açıktır.

$\mathbb{R}$ içinde herhangi bir (x_n) dizisi verilsin. (x_n) sınırlı veya sınırsız olabilir. $\forall n \in \mathbb{N}$ için.

$$l_n = \inf \{ x_k : k \geq n \} = \inf \{ x_n, x_{n+1}, \dots \}$$

$$L_n = \sup \{ x_k : k \geq n \} = \sup \{ x_n, x_{n+1}, \dots \}$$

diyelim.

Teorem 20.

$$l = \lim_{n \rightarrow \infty} l_n \text{ ve } L = \lim_{n \rightarrow \infty} L_n \text{ 'dir.}$$

Teorem 21. $\mathbb{R}$ içinde bir (x_n) dizisi için

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a \iff \underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n = \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n = a \text{ 'dir.}$$

Tanım 58. $\mathbb{R}$ içinde bir (x_n) dizisi verilsin. Eğer, $\forall n \in \mathbb{N}$ için (x_n) dizisinin $x_n \leq x_{n_0}$ ($x_n \geq x_{n_0}$) olacak şekilde bir x_{n_0} terimi varsa, x_{n_0} , (x_n) dizisinin en büyük (maksimal) (en küçük veya minimal) terimidir denir ve

$$x_{n_0} = \max(x_n) \text{ (} x_{n_0} = \min(x_n) \text{) şeklinde gösterilir.}$$

Lemma 2

Eğer, (x_{n_k}) , (x_n) dizisinin bir alt dizisi ise,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n \leq \lim_{k \rightarrow \infty} x_{n_k}$$

dir.

Lemma 3-

Herhangi bir (x_n) dizisi için

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (-x_n) = -\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n \quad \text{ve} \quad \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} (-x_n) = \underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n \quad \text{dir.}$$

Lemma 4-

Her $n \in \mathbb{N}$ için $x_n > 0$ olmak üzere

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n \cdot \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{x_n} = \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \cdot \underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{x_n} = 1 \quad \text{dir.}$$

Ör $x_n = 1 + \frac{n}{n+1} \cos \frac{n\pi}{2}$, $n \in \mathbb{N}$ olmak üzere (x_n) dizisi

için $\inf(x_n) = \inf R(x_n)$, $\sup(x_n) = \sup R(x_n)$,

$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ ve $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n$ ni bulunuz.

Çözüm. (x_n) dizisinin $x_{4k-2} = 1 - \frac{4k-2}{4k-1}$,

$x_{2k-1} = 1$ ve $x_{4k} = 1 + \frac{4k}{4k+1}$ olmak üzere

(x_{4k-2}) , (x_{2k-1}) ve (x_{4k}) alt dizilerini göz önüne alalım. (x_{4k-2}) dizisinin azalan, (x_{4k}) dizisinin artan ve $\forall k \in \mathbb{N}$ için $x_{4k-2} < x_{2k-1} < x_{4k}$ olduğu aşiktir. O halde

$$\inf(x_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim_{k \rightarrow \infty} x_{4k-2} = \lim_{k \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{4k-2}{4k-1}\right) = 0$$

$$\sup(x_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim_{k \rightarrow \infty} x_{4k} = \lim_{k \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{4k}{4k+1}\right) = 2$$

bulunur.

~~ör~~ $x_n = \sin n^\circ$; $n \in \mathbb{N}$ olmak üzere (x_n) dizisi için

(1) $\mathbb{Z}$ Limit noktaları kümesini;

(2) $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ ve $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n$ limitlerini bulunuz.

Çözüm.

(1) $\forall n, p \in \mathbb{N}$ için

$$\sin(n + 360^\circ p) = \sin n^\circ$$

olduğundan, $0, \pm \sin 1^\circ, \pm \sin 2^\circ, \dots, \pm \sin 89^\circ, \pm 1$ sayıları (x_n) dizisinin terimleri arasında sonsuz sayıda tekrarlanmaktadır. O halle, bu sayılar (x_n) dizisinin birer limit noktalarıdır.

Her $a \notin \{0, \pm \sin 1^\circ, \pm \sin 2^\circ, \dots, \pm \sin 89^\circ, \pm 1\}$ sayısının öyle $U_\epsilon(a)$ komşuluğu bulunabilir ki (x_n) dizisinin bütün terimleri bu komşuluğun dışındadır. O halde (x_n) dizisinin limit noktaları kümesi

$$\mathbb{Z} = \{0, \pm \sin 1^\circ, \pm \sin 2^\circ, \dots, \pm \sin 89^\circ, \pm 1\} \text{ dir.}$$

(2) $\inf \mathbb{Z} = -1$ ve $\sup \mathbb{Z} = 1$ olduğundan,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sin n^\circ = -1 \text{ ve } \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \sin n^\circ = 1 \text{ dir.}$$

Çözümü Problemler.

- 1) $x_n = \frac{3^n - 2^n}{2^n + 1}$, $n \in \mathbb{N}$ dizisinin sınırlı olup olmadığına inceleyiniz.

Çözüm.

$\forall n \in \mathbb{N}$ için

$$y_n = \frac{3^n - 2^n}{2^n + 1} = \left(\frac{3}{2}\right)^n \frac{1 - \left(\frac{2}{3}\right)^n}{1 + \left(\frac{1}{2}\right)^n} \geq \left(\frac{3}{2}\right)^n \frac{1 - \frac{2}{3}}{1 + \frac{1}{2}}$$

$$= \left(\frac{3}{2}\right)^n \cdot \frac{2}{9} \geq \frac{1}{3}$$

olduğundan, (y_n) dizisi alttan sınırlıdır. Herhangi $M > 0$ sayısı verildiğinde $N = \lfloor \log_{\frac{3}{2}} \left(\frac{9M}{2}\right) \rfloor + 1$

doğal sayısı için $y_N \geq \frac{2}{9} \left(\frac{3}{2}\right)^N > M \Rightarrow$

(y_n) dizisi üstten sınırsızdır.

- 2) $y_n = \frac{100^n}{n!}$, $n \in \mathbb{N}$ dizisinin minimal ve maksimal terimlerini varsa bulunuz.

Çözüm.

$$\frac{y_{n+1}}{y_n} = \frac{100}{n+1} \Rightarrow (y_n) \quad n > 99 \text{ için azalan,}$$

$1 \leq n \leq 99$ için artandır. Dolayısıyla,

$$\max(y_n) = y_{100} = \frac{100^{100}}{100!} = \frac{100^{99}}{99!} \text{ elde edilir.}$$

Minimal elemanı yoktur.

3) Limit tanımını kullanarak $\lim_{n \rightarrow \infty} \log_2 n = 0$ olduğunu gösteriniz.

Çözüm.

$\forall n > 2$ ($n \in \mathbb{N}$) için

$$|\log_2 n - 0| = |\log_2 n| = \frac{1}{\log_2 n} < \varepsilon \Leftrightarrow n > \frac{1}{2\varepsilon}$$

olur. O halde $n_\varepsilon = \lceil \frac{1}{2\varepsilon} \rceil$ ($n_\varepsilon = 1$, $\varepsilon > 1$ ise) olmak

üzere $\forall n > n_\varepsilon$ için $|\log_2 n| < \varepsilon \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \log_2 n = 0$ bulunur.

4) Aşağıdaki limitleri hesaplayınız.

a) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 - n}{n - \sqrt{n}}$

b) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{10^n + n!}{2^n + (n+1)!}$

c) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n^3}{n^2 + 3} - \frac{2n^2}{2n+1} \right)$

d) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{2} + \frac{3}{2^2} + \dots + \frac{2n-1}{2^n} \right)$

Çözüm.

a) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 - n}{n - \sqrt{n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n^2 - n)(n + \sqrt{n})}{(n - \sqrt{n})(n + \sqrt{n})} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\cancel{n^2 - n}(n + \sqrt{n})}{n^2 - \cancel{n^2 - n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} n + \sqrt{n} = \infty$

$$\begin{aligned}
 \text{b) } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{10^n + n!}{2^n + (n+1)!} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n! \left(\frac{10^n}{n!} + 1 \right)}{(n+1)! \left(\frac{2^n}{(n+1)!} + 1 \right)} \\
 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\left(\frac{10^n}{n!} + 1 \right)}{\left[\frac{1}{n+1} \left(\frac{2^n}{n!} \right) + 1 \right] (n+1)} \\
 &= 0
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{c) } \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n^3}{n^2+3} - \frac{2n^2}{2n+1} \right) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\cancel{2n^4} + n^3 - \cancel{2n^4} - 6n^2}{(2n+1)(n^2+3)} \\
 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^3 - 6n^2}{(2n+1)(n^2+3)} \\
 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\cancel{n^3} \left(1 - \frac{6}{n} \right)}{\cancel{n} \left(2 + \frac{1}{n} \right) \cancel{n^2} \left(1 + \frac{3}{n} \right)} \\
 &= \frac{1}{2}
 \end{aligned}$$

$$\text{d) } x_n = \frac{1}{2} + \frac{3}{2^2} + \frac{5}{2^3} + \dots + \frac{2n-1}{2^n}$$

$$\Rightarrow x_n - \frac{1}{2} x_n = \frac{1}{2} + \left(\frac{3}{2^2} - \frac{1}{2^2} \right) + \left(\frac{5}{2^3} - \frac{3}{2^3} \right) + \dots + \left(\frac{2n-1}{2^n} - \frac{2n-3}{2^n} \right) - \frac{2n-1}{2^{n+1}}$$

$$= \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{2^{n-1}} \right) - \frac{2n-1}{2^{n+1}}$$

$$\begin{aligned}
 \Rightarrow x_n &= 1 + \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{2^{n-2}} \right) - \frac{2n-1}{2^n} \\
 &= 1 + \frac{1 - \frac{1}{2^{n-1}}}{1 - \frac{1}{2}} - \frac{2n-1}{2^n}
 \end{aligned}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1 - \frac{1}{2^{n-1}}}{1 - \frac{1}{2}} - \frac{2n-1}{2^n} \right)$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + 2 - \frac{1}{2^{n-2}} - \frac{2n-1}{2^n} \right)$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} 3 - \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2^{n-2}} - 2 \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{2^n} + \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2^n}$$

$$= 3$$

bulunur.

5) $x_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} - \ln n$, $n \in \mathbb{N}$ olmak üzere

(x_n) dizisinin yakınsak olduğunu gösteriniz.

Çözüm:

$$x_{n+1} - x_n = \frac{1}{n+1} - \ln(n+1) + \ln n$$

$$= \frac{1}{n+1} - \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)$$

ve $\forall n \in \mathbb{N}$ için

$$\frac{1}{n+1} < \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) < \frac{1}{n} \quad (*)$$

eşitsizliği doğru olduğundan, her $n \in \mathbb{N}$ için $x_{n+1} < x_n$ olur. Demek ki, (x_n) dizisi azalandır. Şimdi dizinin alttan sınırlı olduğunu gösterelim.

(*) 'dan dolayı her $n \in \mathbb{N}$ için

$$x_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} - \ln n$$

$$> \ln(1+1) + \ln(1+\frac{1}{2}) + \dots + \ln(1+\frac{1}{n}) - \ln n$$

$$= \ln(2 \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{4}{3} \cdot \dots \cdot \frac{n+1}{n} \cdot \frac{1}{n})$$

$$= \ln \frac{n+1}{n} > \frac{1}{n+1} > 0$$

olur. Bu ise (x_n) dizisinin alttan sınırlı olması demektir. O halde (x_n) dizisi yakınsaktır.

6) Genel terimi $x_n = 0, \underbrace{55\dots5}_{n \text{ tane}}, n \in \mathbb{N}$ olan dizinin

Cauchy dizisi olduğunu gösteriniz.

Çözüm. $x_n = 0, \underbrace{55\dots5}_{n \text{ tane}} = \frac{5}{10} + \frac{5}{10^2} + \dots + \frac{5}{10^n}, n \in \mathbb{N}$

olduğundan her $n, p \in \mathbb{N}$ için

$$x_{n+p} - x_n = \frac{5}{10^{n+1}} + \frac{5}{10^{n+2}} + \dots + \frac{5}{10^{n+p}}$$

$$= \frac{5}{10^{n+1}} \left[1 + \frac{1}{10} + \frac{1}{10^2} + \dots + \frac{1}{10^{p-1}} \right]$$

$$= \frac{5}{10^{n+1}} \cdot \frac{1 - \frac{1}{10^p}}{1 - \frac{1}{10}} < \frac{5}{9 \cdot 10^n}$$

elde edilir. Buna göre her $\varepsilon > 0$ için $\exists n_\varepsilon = \lceil \log_{\frac{9}{5}} \frac{5}{\varepsilon} \rceil$

öyle ki her $n > n_\varepsilon$ ($n \in \mathbb{N}$) ve her $p \in \mathbb{N}$ için $|x_{n+p} - x_n| < \varepsilon$

$\Rightarrow (x_n)$ dizisi bir Cauchy dizisidir.

FONKSİYONLARIN LİMİTLERİ

Temel Tanımlar ve Önermeler

Boş olmayan herhangi bir $X \subset \mathbb{R}$ kümesinin limit (yığılma) noktalarının kümesini X' ile göstereceğiz.

Boş olmayan $X \subset \mathbb{R}$ kümesi, $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu, $A \in \mathbb{R}$ sayısı ve $a \in X'$ noktası verilsin. Aşağıda, x, X içinde kalmak üzere a 'ya (eşit olmadan) yaklaşırken f 'nin değerlerinin A sayısına yaklaşmasının eşitli tanımları verilecek ve bunların denk oldukları gösterilecektir.

Tanım 59. (Cauchy'ye göre)

Eğer, her $\varepsilon > 0$ ve her $x \in X$ için $0 < |x - a| < \delta$ iken $|f(x) - A| < \varepsilon$ olacak şekilde ε sayısına bağlı bir $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ sayısı varsa, f 'nin X kümesine göre a noktasındaki limiti A dır denir ve

$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A$ veya $x \in X, x \rightarrow a$ iken $f(x) \rightarrow A$ şeklinde yazılır.

Bu tanımları daha kısa olarak şu şekilde yazılabilir:

$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0$ öyle ki $\forall \delta > 0$ için $\exists x \in X$ için $0 < |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon$ olur.

Bu tanımın değili şu şekilde yazılabilir:

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) \neq A \Leftrightarrow \exists \varepsilon > 0 \text{ öyle ki } \forall \delta > 0 \text{ için } \exists x \in X$$

$$\text{öyle ki } 0 < |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - A| \geq \varepsilon \text{ olur.}$$

$$0 < |x - a| < \delta \Leftrightarrow x \in \dot{U}_\delta(a)$$

$$|f(x) - A| \leq \varepsilon \Leftrightarrow f(x) \in U_\varepsilon(A)$$

$$|f(x) - A| \geq \varepsilon \Leftrightarrow f(x) \notin U_\varepsilon(A)$$

olduğu dikkate alındığında yukarıda verilen tanımları aşağıdaki şekilde verebiliriz.

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A \Leftrightarrow A \text{'nin her } U_\varepsilon(A) \text{ komsuluğu}$$

için a 'nın öyle bir $\dot{U}_\delta(a)$ komsuluğu vardır ki, herhangi $x \in \dot{U}_\delta(a) \cap X$ için $f(x) \in U_\varepsilon(A)$ (veya

$$f(\dot{U}_\delta(a) \cap X) \subset U_\varepsilon(A)) \text{ olur.}$$

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) \neq A \Leftrightarrow A \text{'nin öyle bir } U_\varepsilon(A) \text{ komsuluğu}$$

vardır ki, a 'nın her $\dot{U}_\delta(a)$ delinmiş komsuluğu için öyle $x \in \dot{U}_\delta(a) \cap X$ vardır ki, $f(x) \notin U_\varepsilon(A)$

$$\text{(veya } f(\dot{U}_\delta(a) \cap X) \not\subset U_\varepsilon(A)) \text{ olur.}$$

Bu tanımları daha kısa olarak şöyle yazabiliriz.

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A \Leftrightarrow \forall U_\varepsilon(A), \exists \dot{U}_\delta(a) f(\dot{U}_\delta(a) \cap X) \subset U_\varepsilon(A)$$

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) \neq A \Leftrightarrow \exists U_\varepsilon(A) \forall \dot{U}_\delta(a) f(\dot{U}_\delta(a) \cap X) \not\subset U_\varepsilon(A)$$

Uyarı. Eğer, $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu herhangi bir $a \in \mathbb{R}$ noktasının bir delinmiş $\dot{U}(a)$ komşuluğunda tanımlı ise, yani

$$\dot{U}(a) \cap X = \dot{U}(a) \cap \mathbb{R} = \dot{U}_\delta(a)$$

ise, $\exists x \rightarrow a$ (veya $x \in X, x \rightarrow a$ iken) yerine daha kısa olan $x \rightarrow a$ sembolünü kullanacağız.

ör/ $\lim_{x \rightarrow 0} x \cdot \sin \frac{1}{x} = 0$ olduğunu gösteriniz.

Çözüm.

Herhangi bir $\varepsilon > 0$ sayısı verildiğinde $\delta = \varepsilon$ alalım. O halde, her $x \neq 0$ için $|x \sin \frac{1}{x}| \leq |x|$ olduğundan dolayı her $x \in \dot{U}_\delta(0)$ için

$$|x \sin \frac{1}{x}| \leq \varepsilon$$

bulunur. Demek ki her $\varepsilon > 0$ için $\exists \delta = \varepsilon$ öyle ki $\forall x \in X$ için

$$0 < |x| < \delta \Rightarrow |x \sin \frac{1}{x}| \leq \varepsilon$$

olur. Bu ise $\lim_{x \rightarrow 0} x \sin \frac{1}{x} = 0$ olduğunu gösterir.

ör/ Limit tanımını kullanarak

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x}{x+1} = \frac{1}{2}$$

olduğunu gösteriniz.

Çözüm. Herhangi bir $\varepsilon > 0$ sayısı verildiğinde her $x \in U_f(1)$ için

$$\left| \frac{x}{x+1} - \frac{1}{2} \right| < \varepsilon$$

olacak şekilde ε 'na bağlı $\delta > 0$ sayısının bulunabileceğini gösterelim.

Her $x \in (0, 2) = U_1(1)$ için

$$\left| \frac{x}{x+1} - \frac{1}{2} \right| = \left| \frac{2x - (x+1)}{2(x+1)} \right|$$

$$= \frac{|x-1|}{2|x+1|} < \frac{1}{2} |x-1| < \frac{\delta}{2} = \varepsilon$$

$\delta = 2\varepsilon$

olduğundan $\delta = \min \{2\varepsilon, 1\} > 0$ alırsak her $x \in U_f(1)$ için

$$|x-1| < \delta \Rightarrow \left| \frac{x}{x+1} - \frac{1}{2} \right| < \varepsilon$$

bulunur. Böylece her $\varepsilon > 0$ için $\exists \delta = \min \{2\varepsilon, 1\} > 0$ öyle ki $\forall x \in U_f(1)$ için $\left| \frac{x}{x+1} - \frac{1}{2} \right| < \varepsilon$ olur. Doğrusuyla verilen eşitlik doğrudur.

Tanım 60: (Heyne'ye göre)

$X \subset \mathbb{R}$, $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ bir fonksiyon ve $a \in X'$ olsun. Eğer, her $n \in \mathbb{N}$ için $x_n \in X \setminus \{a\}$ ve $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$

koşullarını sağlayan her (x_n) dizisi için $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = A$

ise, f 'nin a noktasında limiti A 'dır denir ve

$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A$ veya $x \in X, x \rightarrow a$ iken $f(x) \rightarrow A$ ○

yazılır. Bu tanımın değili:

$\lim_{x \rightarrow a} f(x) \neq A \Leftrightarrow \forall n \in \mathbb{N}$ için $x_n \in X \setminus \{a\}$ ve

$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$ koşullarını sağlayan öyle (x_n) dizisi

vardır ki, $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) \neq A$ 'dır.