Yüksek Mertebeden Diferansiyel Denklemler

Bir diferansiyel denklemin mertebesi iki veya daha büyükse dif. denkleme genel olarak yüksek mertebeden dif. denklem denir. Yüksek mertebeden diferansiyel denklemler bir bütün olarak incelenirler.

Genel olarak n. mertebeden bir dif. denklem

$$A_0(x)\,y^{(n)} + A_1(x)\,y^{(n-1)} + \cdots + A_{n-1}(x)\,y' + A_n(x)\,y = B(x)$$

yapısındadır. $A_0(x) \neq 0$ ve $n > 0$ bir tam sayıdır.

$$\frac{A_0(x)}{A_0(x)}\,y^{(n)} + \underbrace{\frac{A_1(x)}{A_0(x)}}_{P_1(x)}\,y^{(n-1)} + \cdots + \underbrace{\frac{A_{n-1}(x)}{A_0(x)}}_{P_{n-1}(x)}\,y' + \underbrace{\frac{A_n(x)}{A_0(x)}}_{P_n(x)}\,y = \underbrace{\frac{B(x)}{A_0(x)}}_{f(x)}$$

$$y^{(n)} + P_1(x)\,y^{(n-1)} + \cdots + P_{n-1}(x)\,y' + P_n(x)\,y = f(x)$$

Yüksek mertebeden diferansiyel denklemlerin çözümünde aksi söylenmedikçe veya gerekli şartlar meydana gelmedikçe daima genel çözüm esastır. Özel çözüm ya da herhangi şartları sağlayan çözüm genel çözümden hesaplanacak olan çözümlerdir.

Genel çözümün temel özelliği, denklemin mertebesine eşit sayıda keyfi sabit bulundurmasıdır. n. mertebeden bir dif. denklemin genel çözümünde n tane keyfi sabit bulunacaktır. n. mertebeden bir dif. denklemin genel çözümü $c_1, c_2, \ldots, c_n$ → n tane keyfi sabit olmak üzere

$$F(x, y, c_1, c_2, \dots, c_n) = 0$$

şeklindedir.

Yüksek mertebeden bir dif. denklemi sağlayan birçok çözüm fonksiyonu vardır. Bu fonksiyonların birbirlerinden bağımsız olması gerekir.

Lineer bağımlılık - bağımsızlık

Eğer tümü sıfır olmayan $c_1, c_2, \dots, c_n$ sabitleri ve $[a,b] \subseteq \mathbb{R}$ aralığındaki tüm x değerleri için

$$c_1 f_1(x) + c_2 f_2(x) + \dots + c_n f_n(x) = 0 \qquad (1)$$

oluyorsa $f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x)$ fonksiyonlarına Lineer bağımlıdır denir.

Ancak $[a,b] \subseteq \mathbb{R}$ aralığındaki tüm x değerleri için $c_1 = c_2 = \dots = c_n = 0$ olduğunda (1) eşitliği sağlanıyorsa bu durumda $f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x)$ fonksiyonları lineer bağımsız olacaklardır.

Eğer bu fonksiyonlar lineer bağımlı iseler o zaman herhangi birisi diğerlerinin lineer kombinasyonu olarak yazılabilecektir.

Ör/ x ve $2x$ fonksiyonlarının $[0,1]$ aralığında Lineer bağımlılığını inceleyiniz.

$$c_1 \cdot x + c_2 \cdot 2x = 0 \qquad \left.\begin{array}{l} c_1 = -2, \quad c_2 = 1 \\ \neq 0 \qquad\quad \neq 0 \end{array}\right\} \Rightarrow -2 \cdot x + 1 \cdot 2x = 0 \checkmark$$

x ve $2x$ lineer bağımlıdır.

Ör/ x ve x^2 fonksiyonlarının $[0,1]$ aralığında lineer bağımlılığını inceleyiniz.

$$c_1 \cdot x + c_2 \cdot x^2 = 0$$

eşitliği ancak $c_1 = c_2 = 0$ olduğunda sağlanacağından bu iki fonksiyon Lineer bağımsızdır.

Verilen bir fonksiyon kümesinin Lineer bağımsız olup olmadığını bunlar ve türevleriyle oluşturulan Wronskian determinantından yararlanarak bulabiliriz.

Tanım : (Wronskian determinantı)

$I=[a,b]$ aralığında tanımlı $f_1(x), f_2(x), ..., f_n(x)$ fonksiyonlarının n. mertebeye kadar sürekli türevleri olsun. Bu durumda bu fonksiyonların I aralığında Lineer bağımlı olması için gerek ve yeter koşul I aralığındaki her x değeri için

$$W(f_1, f_2, ..., f_n) = \begin{vmatrix} f_1 & f_2 & \cdots & f_n \\ f_1' & f_2' & \cdots & f_n' \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ f_1^{(n-1)} & f_2^{(n-1)} & \cdots & f_n^{(n-1)} \end{vmatrix} = 0$$

olmasıdır. Bu determinanta Wronskian determinantı denir.

$W(f_1, f_2, \ldots, f_n) = 0$ olması lineer bağımlılık için gerek koşuldur. Yeter değildir. Yani $W(f_1, f_2, \ldots, f_n) = 0$ olmasına karşın $f_1, f_2, \ldots, f_n$ fonksiyonları lineer bağımsız olabilir.

Ancak $f_1, f_2, \ldots, f_n$ fonksiyonlarının I aralığında lineer bağımsız olması için gerek ve yeter koşul bu aralıktaki her x değeri için $W(f_1, f_2, \ldots, f_n) \neq 0$ olmasıdır.

Ör/ $\sin^2 x, \cos^2 x, 1$ fonksiyonlarının herhangi bir aralıkta lineer bağımlı olduklarını gösteriniz.

$$W(\sin^2 x, \cos^2 x, 1) = \begin{vmatrix} \sin^2 x & \cos^2 x & 1 \\ \overset{\sin 2x}{2\sin x \cdot \cos x} & \overset{-\sin 2x}{-2\cos x \cdot \sin x} & 0 \\ 2\cos 2x & -2\cos 2x & 0 \end{vmatrix} = (-1)^{1+3} \cdot 1 \cdot \begin{vmatrix} \sin 2x & -\sin 2x \\ 2\cos 2x & -2\cos 2x \end{vmatrix} = 0$$

Ör/ a ve b iki reel sayı ve $b \neq 0$ olsun. Bu durumda $f_1 = e^{ax}\cos bx$ ve $f_2 = e^{ax}\sin bx$ fonksiyonları tüm reel eksende lineer bağımsızdırlar, gösteriniz.

Reel eksen üzerindeki her x için

$$W(e^{ax}\cos bx, e^{ax}\sin bx) = \begin{vmatrix} e^{ax}\cos bx & e^{ax}\sin bx \\ ae^{ax}\cos bx - be^{ax}\sin bx & ae^{ax}\sin bx + be^{ax}\cos bx \end{vmatrix}$$

$$= ae^{2ax}\sin bx\cos bx + be^{2ax}\cos^2 bx - (ae^{2ax}\sin bx\cos bx - be^{2ax}\sin^2 bx)$$

$$= \cancel{ae^{2ax}\sin bx\cos bx} + be^{2ax}\cos^2 bx - \cancel{ae^{2ax}\sin bx\cos bx} + be^{2ax}\sin^2 bx$$

$$= be^{2ax}(\cos^2 bx + \sin^2 bx)$$

$$= \underbrace{b}_{\neq 0}\underbrace{e^{2ax}}_{\neq 0}$$

$$\neq 0$$

Teorem:

$$a_0(x)y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1}(x)y' + a_n(x)y = f(x) \qquad (2)$$

Lineer denklemi ile

$$a_0(x)y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1}(x)y' + a_n(x)y = 0 \qquad (3)$$

ikinci tarafsız denklemi verilmiş olsun.

NOT: $a_0(x)y^{(n)}+a_1(x)y^{(n-1)}+\dots+a_{n-1}(x)y'+a_n(x)y=a_0(x)\dfrac{d^ny}{dx^n}+a_1(x)\dfrac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}+\dots+a_{n-1}(x)\dfrac{dy}{dx}+a_n(x)y$

$$=a_0(x)D^ny+a_1(x)D^{n-1}y+\dots+a_{n-1}(x)Dy+a_n(x)y$$

$$L=\left[a_0(x)D^n+a_1(x)D^{n-1}+\dots+a_{n-1}(x)D+a_n(x)\right]$$

$\Rightarrow$ (2) yerine $L(D)y=f(x)$

(3) yerine $L(D)y=0$

yazılabilir.

$a_i(x)$ $(i=0,\dots,n)$, $f(x)$ bir I aralığında tanımlı ve sürekli fonksiyonlar ve de $a_0(x)\neq 0$ olsun. Bu durumda (3) denkleminin I aralığında n tane lineer bağımsız çözümü vardır.
Eğer $y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)$ fonksiyonları (3) denkleminin lineer bağımsız çözümleri ise

ikinci tarafsız denk'in genel çöz.

$$y_h=u=c_1y_1+c_2y_2+\dots+c_ny_n \qquad (c_i \quad (i=1,\dots,n) \quad \text{sbt})$$

fonksiyonu (3) denkleminin genel çözümüdür.

Bundan başka, verilen I aralığında (2) denkleminin çözümleri de vardır. Eğer $\vec{v}, y_ö$ (2) denkleminin bir çözümü ise $y = u + v = y_h + y_ö$ fonksiyonu (2) denkleminin genel çözümü olur.

$f(x) \not\equiv 0 \Rightarrow$ ikinci taraflı denklemin genel çözümü $y = y_h + y_ö \rightarrow (L(D)y = f(x)$'in çözümü$)$

$f(x) \equiv 0 \Rightarrow$ ikinci tarafsız denklemin genel çözümü $y_h \rightarrow (L(D)y = 0$'ın çözümü$)$

Ör/ $y = c_1 e^{-2x} + c_2 e^{x} - \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x - \frac{1}{4}$ fonksiyonunun $y'' + y' - 2y = x^2 - 1$ dif. denk'nin genel çözümü olduğunu gösteriniz.

$y_1 = e^{-2x} \qquad y_2 = e^{x}$

$$W(y_1, y_2) = \begin{vmatrix} e^{-2x} & e^{x} \\ -2e^{-2x} & e^{x} \end{vmatrix} = e^{-x} - (-2e^{-x}) = 3e^{-x} \neq 0 \quad \text{Lineer bağımsızlar.}$$

$y'' + y' - 2y = 0 \Rightarrow y_1 = e^{-2x}$ için $\quad 4e^{-2x} + (-2e^{-2x}) - 2(e^{-2x}) = 0$ ✓

$y_1' = -2e^{-2x}$

$y_1'' = 4e^{-2x}$

$\left.\begin{array}{l} y_2 = e^{x} \\ y_2' = e^{x} \\ y_2'' = e^{x} \end{array}\right\} \Rightarrow e^{x} + e^{x} - 2e^{x} = 0$ ✓

O halde e^{-2x} ve e^{x} ikinci tarafsız denklemin lineer bağımsız çözümleridir ve $y_h = c_1 e^{-2x} + c_2 e^{x}$ deriz.

$v = -\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x - \frac{1}{4}$ 2. taraflı denklemi sağlamalı $(y'' + y' - 2y = x^2 - 1)$

$v' = -x - \frac{1}{2}$

$v'' = -1$

$$\Rightarrow -1 + \left(-x - \frac{1}{2}\right) - 2\left(-\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x - \frac{1}{4}\right) = -1 \cancel{-x} \cancel{-\frac{1}{2}} + x^2 \cancel{+x} \cancel{+\frac{1}{2}}$$

$$= x^2 - 1 \quad \checkmark$$

Yani $v = y_ö$ dif. denklemin bir özel çözümüdür. O halde $y = \underbrace{c_1 e^{-2x} + c_2 e^{x}}_{y_h} \underbrace{- \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x - \frac{1}{4}}_{y_ö}$ fonksiyonu

verilen dif. denklemin genel çözümüdür.

Sabit Katsayılı İkinci tarafsız (homojen) Lineer denklemler

n. mertebeden sabit katsayılı ikinci tarafsız (homojen) Lineer denklem

$$L(D)\,y = \left(a_0 D^n + a_1 D^{n-1} + \dots + a_{n-1} D + a_n\right) y = 0 \qquad (4)$$

şeklinde yazılabilir. Burada a_i $(i = 0, \dots, n)$ katsayıları sabittir ve $a_0 \neq 0$.

Eğer (4) denkleminin $y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)$ gibi n tane Lineer bağımsız çözümü bilinirse o zaman $c_1, c_2, \dots, c_n$ keyfi sabitler olmak üzere

$$y = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) + \cdots + c_n y_n(x)$$

ikinci tarafsız denklemin genel çözümü olur. ($y_1, y_2, \ldots, y_n$ 'lere temel (esas) çözüm takımı denir)

Teorem Eğer a_i $(i=0,\ldots,n)$ sabitler olmak üzere $L(D) = a_0 D^n + a_1 D^{n-1} + \cdots + a_{n-1} D + a_n$ sabit katsayılı bir operatör ise o zaman

$$L(D) \cdot e^{rx} = L(r) e^{rx}$$

olur. Burada r reel ya da kompleks sabittir.

$$y = e^{rx}$$
$$y' = re^{rx}$$
$$y'' = r^2 e^{rx}$$
$$\vdots$$
$$y^{(n)} = r^n e^{rx}$$

$$L(D)e^{rx} = (a_0 \underbrace{D^n e^{rx}}_{(e^{rx})^{(n)}} + a_1 \underbrace{D^{n-1} e^{rx}}_{(e^{rx})^{n-1}} + \cdots + a_{n-1} \underbrace{D e^{rx}}_{(e^{rx})'} + a_n e^{rx})$$

$$= a_0 r^n e^{rx} + a_1 r^{n-1} e^{rx} + \cdots + a_{n-1} r e^{rx} + a_n e^{rx}$$

$$= (a_0 r^n + a_1 r^{n-1} + \cdots + a_{n-1} r + a_n) e^{rx}$$

$$= L(r) e^{rx}$$

İkinci tarafsız (4) denkleminin e^{rx} şeklinde çözümlerini arayalım. Bunun için (4) denkleminde y yerine e^{rx} yazarsak;

$$L(D)y=0$$

$$\Rightarrow L(D)e^{rx}=0$$

olur. Eğer $L(D)e^{rx}=0$ sağlanacak şekilde r belirlenebilir ise $y=e^{rx}$ çözüm dur.

$L(D)e^{rx}=L(r)e^{rx}=0$ ve $e^{rx}\neq 0$ olduğundan

$$L(r)=0$$

olmalıdır.

$\underbrace{L(r)=a_0r^n+a_1r^{n-1}+\dots+a_{n-1}r+a_n=0}$ 'dır.

(4) denkleminin karakteristik denklemi adını alır.

Karakteristik denklemin kökleri bulmak istediğimiz r değerlerini verir.