5. Singüler Sturm-Liouville Probleminin Spektral Teorisi

$$(p(x)y')' + q(x)y + \lambda r y = 0 \qquad (a<x<b)$$

Sturm-Liouville denkleminde $p(x), p'(x), q(x)$ ve $r(x)$ fonksiyonlarının (a,b) aralığında sürekli ve bu açık aralıkta $p(x)>0$, $r(x)>0$ olduğunu varsayalım. Eğer aşağıdakilerden en az biri sağlanıyorsa bu denkleme Singüler Sturm-Liouville denklemi denir.

1) $\lim_{x\to a^+} p(x) = 0$ veya $\lim_{x\to b^-} p(x) = 0$ dır.

2) $p(x), q(x)$ veya $r(x)$; x değişkeni a veya b'ye yaklaşırken sonsuzdur.

3) (a,b) aralığı sonsuz yani (a,∞), $(-\infty,b)$ veya $(-\infty,\infty)$ dur.

5.1. Yarı eksende Parseval eşitliği

$q(x)$, $[0,\infty)$ aralığında tanımlı, sürekli ve reel değerli bir fonksiyon olmak üzere

$$y''(x) + [\lambda - q(x)]\, y(x) = 0 \qquad (5.1)$$

$$y(0) = \sin\alpha \qquad y'(0) = -\cos\alpha \qquad (5.2)$$

problemini gözönüne alalım.

$y(x,\lambda)$ (5.1)-(5.2) probleminin çözümü olsun.

Teorem 5.1.1

$(-\infty,\infty)$ aralığında tanımlı ve monoton azalmayan öyle bir $\rho(\lambda)$ fonksiyonu vardır ki $\forall f(x) \in L_2[0,\infty)$ için

$$\int_0^\infty f^2(x)\,dx = \int_{-\infty}^{\infty} F^2(\lambda).\,d\rho(\lambda) \qquad (5.3)$$

dır. Burada $F(\lambda)$, $F_n(x) = \int_0^n f(x).\,y(x,\lambda)\,dx$ $(n=1,2,\ldots)$ dizisinin

$$\lim_{n\to\infty} \int_{-\infty}^{\infty} [F(\lambda) - F_n(\lambda)]^2\, d\rho(\lambda)$$

şeklindeki limitidir.

(5.3) eşitliğine Parseval Eşitliği denir. Bu eşitlikteki $F(\lambda)$ fonksiyonuna $f(x)$ fonksiyonunun genelleşmiş Fourier Dönüşümü denir.

f ve g $L_2[0,\infty)$ uzayının herhangi iki elemanı; F ve G de sırasıyla bu fonksiyonların genelleşmiş Fourier dönüşümleri olsun. Gösterebiliriz ki $f+g$ fonksiyonunun genelleşmiş Fourier dönüşümü $F+G$ 'dir. O halde Teorem 5.1.1 'den dolayı

$$\int_0^{\infty} [f(x)+g(x)]^2 dx = \int_{-\infty}^{\infty} [F(\lambda)+G(\lambda)]^2 d\rho(\lambda) \text{ dır.}$$

$$[f(x)]^2 + 2[f(x)g(x)] + [g(x)]^2 \qquad ([F(\lambda)]^2 + 2[F(\lambda)G(\lambda)] + [G(\lambda)]^2$$

Buradan;

$$\int_0^{\infty} f(x) \cdot g(x)\, dx = \int_{-\infty}^{\infty} F(\lambda) \cdot G(\lambda)\, d\rho(\lambda) \qquad (5.4)$$

sonucu çıkar. Bu eşitliğe Genelleşmiş Parseval Eşitliği denir.

Teorem 5.1.2.

f, $L_2[0,\infty)$ uzayının elemanı ve $[0,\infty)$'da sürekli olduğunu kabul edelim. Eğer

$$\int_{-\infty}^{\infty} F(\lambda)\, y(x,\lambda)\, d\rho(\lambda)$$

integrali mutlak ve her sonlu aralıkta x'e göre düzgün yakınsak ise

$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} F(\lambda)\, y(x,\lambda)\, d\rho(\lambda) \text{ 'dır.}$$

5.2. Weyl Çemberi ve Noktası

$q(x)$, $[0,\infty)$'da tanımlı, sürekli ve reel değerli bir fonksiyon olmak üzere (5.1) denklemini ($\lambda \in \mathbb{C}$, $\operatorname{Im}\lambda = v \neq 0$) olacak şekilde (5.1) denkleminin

$$\varphi(0) = \sin\alpha \qquad \theta(0) = \cos\alpha$$
$$\varphi'(0) = -\cos\alpha \qquad \theta'(0) = \sin\alpha$$

koşullarını sağlayan

$$\varphi(x) = \varphi(x,\lambda) \quad \text{ve} \quad \theta(x) = \theta(x,\lambda)$$

çözümlerini gözönüne alalım. (Cauchy problemi olduğundan φ ve θ çözümleri tektir)

$$W_0(\varphi,\theta) = \begin{vmatrix} \varphi(0) & \varphi'(0) \\ \theta(0) & \theta'(0) \end{vmatrix} = \varphi(0)\theta'(0) - \varphi'(0)\theta(0) = \sin\alpha . \sin\alpha - (-\cos\alpha) . \cos\alpha$$
$$= \sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1 \neq 0$$

$W_0(\varphi,\theta) \neq 0$ olduğundan φ ve θ çözümleri lineer bağımsızdırlar. Dolayısıyla (5.1) denkleminin genel çözümü

$$c_1\varphi(x) + c_2\theta(x)$$

şeklindedir.

(5.1) denkleminin $0<b<\infty$ ve $-\infty<\beta<\infty$ olmak üzere

$$\left[c_1\varphi(b)+c_2\theta(b)\right]\cdot\cos\beta+\left[c_1\varphi'(b)+c_2\theta'(b)\right]\cdot\sin\beta=0 \qquad (5.5)$$

koşulunu sağlayan sıfırdan farklı çözümünü gözönüne alalım.
Bu çözüm için $c_2\neq 0$'dır. Eğer $c_2=0$ olsaydı o zaman

$$\varphi(b)\cos\beta+\varphi'(b)\sin\beta=0$$

olurdu. Bu durumda

$$\varphi(0)\cos\alpha+\varphi'(0)\sin\alpha=0$$

olduğu gözönüne alınırsa reel olmayan λ sayısı

$$\left.\begin{array}{l} y''+[\lambda-q(x)]y=0 \\ y(0)\cos\alpha+y'(0)\sin\alpha=0 \\ y(b)\cos\beta+y'(b)\sin\beta=0 \end{array}\right\}$$ Regüler Sturm-Liouville probleminin özdeğeri ve φ'de bu özdeğere karşı gelen özfonksiyondur.

λ reel olmadığından bu olanaksızdır. O halde $c_2\neq 0$ olmak zorundadır.

$\frac{c_1}{c_2} = \omega$ olmak üzere (5.5) koşulu

$$\left[c_1 \varphi(b) + c_2 \theta(b)\right] \cdot \cos\beta + \left[c_1 \varphi'(b) + c_2 \theta'(b)\right] \cdot \sin\beta = 0$$

$$\Rightarrow \left[\omega \varphi(b) + \theta(b)\right] \cdot \frac{\cos\beta}{\sin\beta} + \left[\omega \varphi'(b) + \theta'(b)\right] = 0$$

şeklinde yazılır. Buradan;

$$\omega\left[\varphi(b)\cot\beta + \varphi'(b)\right] = -\theta(b)\cot\beta - \theta'(b) \Rightarrow \omega = -\frac{\theta(b)\cot\beta + \theta'(b)}{\varphi(b)\cot\beta + \varphi'(b)}$$

olarak yazılır. $\cot\beta$ yerine z $(z \in \mathbb{C})$ yazıp

$$\omega = \omega(\lambda, z) = -\frac{\theta(b)z + \theta'(b)}{\varphi(b)z + \varphi'(b)}$$

fonksiyonunu gözönüne alalım.

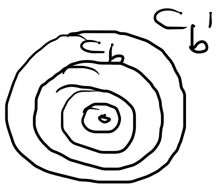
Teorem 5.2.1

w- fonksiyonu; reel ekseni, merkezi $-\dfrac{W_b[\theta,\bar{\varphi}]}{W_b[\varphi,\bar{\theta}]}$ noktası ve yarıçapı

$$r_b = \left[2v\int_0^b |\varphi(x)|^2\,dx\right]^{-1}$$

olan bir C_b çemberine dönüştürür.

$0<b'<b$ ise C_b çemberinin $C_{b'}$ çemberi içinde kaldığı gösterilebilir.



Dolayısıyla $b\to\infty$ iken C_b çemberleri ya bir limit çemberine ya da bir limit noktasına yakınsar. Bu Limit çemberine Weyl çemberi ya da Weyl noktası denir.

Teorem 5.2.2

Her reel olmayan λ sayısı için (5.1) denkleminin

$$\psi(x,\lambda) = \varphi(x,\lambda) + m(\lambda)\cdot\theta(x,\lambda)$$

şeklinde $L_2[0,\infty)$ uzayına ait olan çözümü vardır. Burada $m(\lambda)$ ya Weyl çemberinin herhangi bir noktasıdır ya da Weyl noktasıdır.

Ör/ $y''(x) + i\,y(x) = 0 \quad (0 \le x < \infty)$ $\qquad (\cos x + i\sin x)^n = \cos nx + i\sin nx$

denkleminin $L_2[0,\infty)$ uzayına ait olan çözümünü bulunuz. (i sanal)

$(\lambda = i \ , \ q(x)=0)$ $\qquad i = \cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2} = e^{i\pi/2}$

$y = e^{\alpha x} \qquad y' = \alpha e^{\alpha x} \qquad y'' = \alpha^2 e^{\alpha x}$

$\alpha^2 e^{\alpha x} + i e^{\alpha x} = 0 \Rightarrow \alpha^2 + i = 0 \Rightarrow \alpha^2 = -i \Rightarrow \alpha = \mp i\sqrt{i} = \mp i\sqrt{e^{i\pi/2}}$

$= \mp i \cdot e^{i\pi/4}$

$\alpha = \mp i\left[\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right]$

$\alpha_1 = i\cdot\left[\frac{1}{\sqrt{2}} + i\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}\right] \qquad \alpha_2 = -i\left[\frac{1}{\sqrt{2}} + i\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}\right]$

$= \frac{i}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}} \qquad = \frac{-i}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}$

$y_1 = e^{\alpha_1 x} = e^{\left(\frac{i}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)x} \qquad y_2 = e^{\alpha_2 x} = e^{\left(-\frac{i}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}\right)x}$

$y_j \in L_2[0,\infty) \Rightarrow \int_0^\infty |y_j|^2 dx < \infty \quad (j=1,2)$ olmalıdır.

$$|y_1(x)|^2 = \left| e^{\left(\frac{i}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)x} \right|^2 = \underbrace{\left| e^{\frac{ix}{\sqrt{2}}} \right|^2}_{=1} \cdot \left| e^{-\frac{x}{\sqrt{2}}} \right|^2 \qquad e^{-\frac{\sqrt{2}x}{2}} = \left(e^{-\sqrt{2}x}\right)^{1/2}$$

$$\Rightarrow \int_0^\infty |y_1(x)|^2 dx = \int_0^\infty \left| e^{-\frac{x}{\sqrt{2}}} \right|^2 dx = \int_0^\infty e^{-\sqrt{2}x} dx$$

$$= \lim_{k\to\infty} \int_0^k e^{-\sqrt{2}x} dx$$

$$= \lim_{k\to\infty} \left(-\frac{1}{\sqrt{2}} e^{-\sqrt{2}x} \Big|_0^k \right)$$

$$= -\frac{1}{\sqrt{2}} \lim_{k\to\infty} \left(e^{-\sqrt{2}k} - 1 \right)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} < \infty \Rightarrow y_1 \in L_2[0,\infty)$$

$$|y_2(x)|^2 = \left|e^{\left(-\frac{i}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}}\right)x}\right|^2 = \underbrace{\left|e^{-\frac{ix}{\sqrt{2}}}\right|^2}_{=1} \left|e^{\frac{x}{\sqrt{2}}}\right|^2$$

$$\int_0^\infty |y_2(x)|^2\,dx = \int_0^\infty \left|e^{\frac{x}{\sqrt{2}}}\right|^2 = \int_0^\infty e^{\sqrt{2}x}\,dx = \lim_{k\to\infty}\int_0^k e^{\sqrt{2}x}\,dx$$

$$= \lim_{k\to\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}e^{\sqrt{2}x}\Big|_0^k\right)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\lim_{k\to\infty}\left(e^{\sqrt{2}k}-1\right)$$

$$= \infty \quad \Rightarrow \quad y_2 \notin L_2[0,\infty)$$