$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (\underbrace{x-c}_{\text{yakınsaklık merkezi}})^n$ şeklindeki serilere kuvvet serisi denir.

$$\underbrace{a_n (x-c)^n}_{u_n} \rightarrow \lim_{n\to\infty} \left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n+1} (x-c)^{n+1}}{a_n (x-c)^n} \right| = \underbrace{\left[\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|\right]}_{r} \cdot |x-c| < 1$$

R → yakınsaklık yarıçapı

$$|x-c| < \frac{1}{r} = \frac{1}{\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|}$$

$$|x-c| < R \Rightarrow -R < x-c < R$$

$c-R < x < c+R \rightarrow$ serinin mutlak yakınsak olduğu aralık.

$x = c-R$ ve $x = c+R$ için seri ayrıca incelenmelidir.

$(c-R, c+R) \rightarrow$ serinin mutlak yakınsak olduğu aralık.

Yak aralığı : $(c-R, c+R)$ veya $(c-R, c+R]$ veya $[c-R, c+R]$ veya $[c-R, c+R)$

Ör/ $\sum_{n=1}^{\infty} \underbrace{\frac{(x-5)^n}{n.2^n}}_{u_n}$ kuvvet serisinin yakınsaklık aralığını belirleyiniz.

→ serinin yak. merkezi = 5

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{(x-5)^{\cancel{n+1}}}{(n+1)\,\cancel{2^{n+1}}} \cdot \frac{n.\cancel{2^n}}{\cancel{(x-5)^n}}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{n}{2(n+1)}.(x-5)\right| = \frac{1}{2}|x-5| < 1 \Rightarrow |x-5| < 2$$

yak. yarıçapı

$-2 < x-5 < 2$

$3 \leq x < 7$ → serinin mutlak yak. olduğu aralık.

$x=3 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(3-5)^n}{n.2^n} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-2)^n}{n.2^n} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}$ → $a_n=\frac{1}{n}$ veya $a_n=\frac{(-1)^n}{n}$

Alt. Harmonik seri

Alt-seri testi;

1°) $a_n > a_{n+1}$ → $n < n+1$. $(\forall n \in \mathbb{N})$

$|a_n| > |a_{n+1}|$ $\quad \frac{1}{n} > \frac{1}{n+1}$ ✓

2°) $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n} = 0$ ✓

$\lim_{n\to\infty}|a_n|$

Alt. seri yak.

3°) $\sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{(-1)^n}{n}\right| = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ Harmonik seri ıraksak.

Alt. seri bu durumda şartlı yak.

$x=7 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(7-5)^n}{n \cdot 2^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n \cdot 2^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ Harmonik seri ıraksaktır.

Seri $(3,7)$ aralığında mutlak yakınsak
$x=3$'te şartlı yakınsak
ve $x<3$, $x\geq 7$ için ıraksaktır.

Yak. aralığı : $[3,7)$

Ör/ $\sum_{n=0}^{\infty} \underbrace{\frac{x^n}{n!}}_{u_n}$ kuvvet serisinin yakınsaklık aralığını bulunuz.

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{x^{\cancel{n}+1}}{\underbrace{(n+1)!}_{(n+1)\cdot \cancel{n!}}} \cdot \frac{\cancel{n!}}{\cancel{x^n}} \right| = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{1}{n+1} \right| \cdot |x| = 0 \cdot |x| = 0 < 1$$

Seri x'in tüm değerleri için yakınsaktır.
Yakınsaklık yarıçapı ∞'dur.

Ör/ $\sum_{n=0}^{\infty} \underbrace{n! \cdot x^n}_{u_n}$ kuvvet serisinin yakınsaklık aralığını bulunuz.

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{(n+1)!\; x^{\cancel{n}+1}}{n!\; \cancel{x^n}} \right| = \lim_{n\to\infty} |n+1| \cdot |x| = \infty \cdot |x| = \infty > 1$$

Serinin yakınsaklık yarıçapı sıfırdır ve seri sadece yakınsaklık merkezi olan sıfırda yakınsaktır.

Ör/ $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2x+5)^n}{(n^2+1)\cdot 3^n}$ serisinin yakınsaklık merkezini, yakınsaklık yarıçapını ve yakınsaklık aralığını bulunuz.

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-c)^n$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\left[2\left(x+\frac{5}{2}\right)\right]^n}{(n^2+1)\cdot 3^n} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n\cdot\left(x-\left(-\frac{5}{2}\right)\right)^n}{(n^2+1)\cdot 3^n}$$

$c = \frac{-5}{2}$ yakınsaklık merkezi.

$$a_n = \frac{2^n}{(n^2+1)\cdot 3^n}$$

$$R = \frac{1}{\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|} = \frac{1}{\lim_{n\to\infty}\left|\frac{2^{n+1}}{\left[(n+1)^2+1\right]\cdot 3^{n+1}}\cdot\frac{(n^2+1)\cdot \cancel{3^n}}{\cancel{2^n}}\right|}$$

$$= \frac{1}{\lim_{n\to\infty}\left[\frac{2}{3}\cdot\frac{(n^2+1)}{\left[(n+1)^2+1\right]}\right]} = \frac{3}{2}$$ yakınsaklık yarıçapı

$$\left|x+\frac{5}{2}\right| < \frac{3}{2} \Rightarrow -\frac{3}{2} < x+\frac{5}{2} < \frac{3}{2} \Rightarrow -4 \leq x \leq -1$$

$$x=-4 \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-8+5)^n}{(n^2+1)\cdot 3^n} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-3)^n}{(n^2+1)\cdot 3^n} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2+1}$$ Alt. seri

Alt - seri testi:

1°) $a_n \overset{?}{>} a_{n+1}$:

$n < n+1$

$n^2 < (n+1)^2$

$n^2+1 < (n+1)^2+1$

$\frac{1}{n^2+1} > \frac{1}{(n+1)^2+1}$ ✓

2°) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n \overset{?}{=} 0$: $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n^2+1} = 0$ ✓ $\Rightarrow$ Alt. seri yakınsaktır.

3°) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \left| \frac{(-1)^n}{n^2+1} \right| = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n^2+1} = 1 + \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+1}$ yak.

$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ p-serisi $p=2>1$ yak.

$n^2 < n^2+1 \quad \forall n \in \mathbb{N}$

$\frac{1}{n^2} > \frac{1}{n^2+1} \Rightarrow$ karşılaştırma testine göre $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+1}$ serisi de yakınsaktır.

$x=-1 \Rightarrow \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{(2.(-1)+5)^n}{(n^2+1).3^n} = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{3^n}{(n^2+1).3^n} = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n^2+1}$ yak.

Serinin yak. aralığı $= [-4,-1]$

Ör/ $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \underbrace{\frac{(-1)^n}{n \cdot 3^n}.(x+2)^n}_{u_n}$ kuvvet serisinin mutlak yakınsak, şartlı yakınsak ve ıraksak olduğu noktaları belirleyiniz.

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{(-1)^{\cancel{n}+1}(x+2)^{\cancel{n}+1}}{(n+1).\cancel{3}^{\cancel{n}+1}} \cdot \frac{n.\cancel{3^n}}{(-1)^{\cancel{n}}.(x+2)^{\cancel{n}}} \right| = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{-n}{3(n+1)} . (x+2) \right| = \frac{1}{3}.|x+2| < 1 \Rightarrow |x+2| < 3$$

$$-3 < x+2 < 3$$

$$-5 < x \leq 1$$

$x=-5$ için : $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n(-5+2)^n}{n\cdot 3^n}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n\cdot(-3)^n}{n\cdot 3^n}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ Harmonik seri ıraksaktır.

$x=1$ için : $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n(1+2)^n}{n\cdot 3^n}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n\cdot 3^n}{n\cdot 3^n}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}$ Alt. Harmonik şartlı yak.

$(-5,1)$ aralığında seri mutlak yakınsak

$x=1$'de şartlı yakınsak

ve $x\leq -5$, $x>1$ için seri ıraksaktır.

Kuvvet Serileri Üzerinde Cebirsel İşlemler

Cebirsel işlemleri göstermek için yakınsaklık merkezi "0" olan $\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ serisini gözönüne alacağız.

($x=y-c$ dönüşümü ile $\sum_{n=0}^{\infty}a_n(y-c)^n$ şeklindeki serilere genişletilebilir)

Teorem : $\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ ve $\sum_{n=0}^{\infty}b_nx^n$ kuvvet serileri sırasıyla R_a ve R_b yakınsaklık yarıçaplarına sahip olsun.

$c\in\mathbb{R}$ sabit olmak üzere

1) $\sum_{n=0}^{\infty}(ca_n)x^n$ serisinin yakınsaklık yarıçapı da $\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ serisinin yakınsaklık yarıçapı olan R_a ile aynıdır. Ve $\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ serisinin yakınsadığı her yerde

$$\sum_{n=0}^{\infty}(ca_n)x^n=c\cdot\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n \text{ dir.}$$

2) $\sum_{n=0}^{\infty} (a_n+b_n)x^n$ kuvvet serisinin yakınsaklık yarıçapı toplamda bulunan serilerin yakınsaklık yarıçaplarının en küçüğünden daha küçük olamaz. $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ ve $\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$ kuvvet serilerinin yakınsadığı her yerde

$$\sum_{n=0}^{\infty} (a_n+b_n)x^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n + \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n \quad \text{dir.}$$

3) Çarpım serisinin yakınsaklık yarıçapı toplamda olduğu gibi çarpımda bulunan serilerin yakınsaklık yarıçaplarının en küçüğünden daha küçük olamaz.

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n\right)\cdot\left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n\right) = (a_0+a_1x+a_2x^2+\dots)(b_0+b_1x+b_2x^2+\dots)$$

(Cauchy çarpımı)

$$= \underbrace{a_0b_0}_{c_0} + \underbrace{(a_0b_1+a_1b_0)}_{c_1}x + \underbrace{(a_0b_2+a_1b_1+a_2b_0)}_{c_2}x^2+\dots$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n \qquad c_n = \sum_{j=0}^{n} a_j\, b_{n-j}$$

Ör/ $\left(\sum_{n=0}^{\infty} x^n\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty} x^n\right) = (1+x+x^2+\dots)(1+x+x^2+\dots)$

$$= 1+2x+3x^2+\dots$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)\cdot x^n$$

$$= \left(\frac{1}{1-x}\right)\left(\frac{1}{1-x}\right) = \left(\frac{1}{1-x}\right)^2$$

$\downarrow$

$|x|<1$

$-1<x<1$

4) Bölüm serisinin katsayılarını belirlemek için basit bir kural yoktur. Ancak, R_a ve R_b sırasıyla pay ve paydadaki serilerin yakınsaklık yarıçapları, R_c yakınsaklık merkezinden paydadaki serinin toplamının sıfır olduğu en yakın kompleks sayıya olan uzaklık olmak üzere bölüm serisinin yakınsaklık yarıçapı R, R_a, R_b ve R_c sayılarının en küçüğünden daha küçük olamaz.

$R \geqslant \min(R_a, R_b, R_c)$'dir.

$$\frac{\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n}{\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n} = \frac{a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots}{b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \cdots}$$

Ör:

$$\frac{1}{1-x} = \frac{1 \cdot 1 + 0 \cdot x + 0 \cdot x^2 + \cdots}{1 + (-1) \cdot x + 0 \cdot x^2 + \cdots} = 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} x^n \qquad |x| < 1$$

$$-1 < x < 1$$

$1:$ $R_a \to \infty$ $\qquad 1 - x = 0 \Rightarrow x = 1$

$1-x:$ $R_b \to \infty$ $\qquad R_c = 1$

$$R = \min\{R_a, R_b, R_c\} = \min\{\infty, \infty, 1\} = 1$$

Kuvvet Serilerinin türetilmesi ve integre edilmesi

Teorem: $R>0$ olmak üzere eğer $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ kuvvet serisi $(-R,R)$ aralığında $f(x)$ fonksiyonuna yakınsıyorsa yani;

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \cdots = f(x)$$

ise;

1) $f(x)$, $(-R,R)$ aralığında türevlenebilirdir ve

$$f'(x) = a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2 + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}$$

2) $f(x)$, $(-R,R)$ aralığının her kapalı alt aralığında integre edilebilirdir ve her $x \in (-R,R)$ için

$$\int_0^x f(t)\,dt = \int_0^x (a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + \cdots)\,dt = a_0 t + a_1 \frac{t^2}{2} + a_2 \frac{t^3}{3} + \cdots \Big|_0^x$$

$$= a_0 x + a_1 \frac{x^2}{2} + a_2 \frac{x^3}{3} + \cdots$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{x^{n+1}}{n+1} \text{ dir.}$$

- Türetilmiş serinin yakınsaklık aralığı, orjinal seri kendi yakınsaklık aralığının uç noktalarında yakınsıyorsa bile muhtemelen bu uç noktaların biri veya her ikisi dışında orjinal serinin yakınsaklık aralığı ile aynıdır.

- İntegre edilmiş seri orjinal serinin yakınsaklık aralığının her yerinde ve muhtemelen orjinal seri uç noktalarda yakınsak olmasa bile bu aralığın uç noktalarının biri veya her ikisinde yakınsaktır.