$$\sum_{n=0}^{\infty} \underbrace{a_n (x-c)^n}_{u_n}$$

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n+1} (x-c)^{n+1}}{a_n (x-c)^n} \right| = \underbrace{\left[\lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| \right]}_{r} \cdot |x-c| < 1$$

$$\Rightarrow |x - c| < \frac{1}{\lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right|} \to R \to \text{yakınsaklık yarıçapı}$$

c → yakınsaklık merkezi

$$|x-c| < R \Rightarrow -R < x-c < R \Rightarrow c-R < x < c+R$$

$x = c-R$ ve $x = c+R$ noktalarında serinin karakteri ayrıca incelenmelidir.

Kuvvet serisi $(c-R,\ c+R)$ aralığında mutlak yakınsaktır.

Yakınsaklık aralığı ; $(c-R, c+R)$, $[c-R, c+R)$, $(c-R, c+R]$, $[c-R, c+R]$ aralıklarından biri olacaktır.

Ör/ $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-5)^n}{n \cdot 2^n}$ u_n kuvvet serisinin yakınsaklık aralığını bulunuz.

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{(x-5)^{\cancel{n+1}}}{(n+1)\cdot 2^{n+1}} \cdot \frac{n\cdot 2^{\cancel{n}}}{(x-5)^{\cancel{n}}}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{n}{2(n+1)}\cdot (x-5)\right| = \frac{1}{2}|x-5| < 1$$

$\Rightarrow |x-5| < 2 \Rightarrow -2 < x-5 < 2 \Rightarrow 3 \leq x < 7$ mutlak yak. aralığı

yak. merk.   yak. yarıçapı

$x=3 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(3-5)^n}{n\cdot 2^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-2)^n}{n\cdot 2^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ Alt. Harmonik seri

Alt seri testine göre;

1°) $a_n > a_{n+1}$?

$n < n+1 \Rightarrow \frac{1}{n} > \frac{1}{n+1}$ ✓

2°) $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$?

$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$ ✓

Alt. seri yak.

3°) $\sum_{n=1}^{\infty} \left|\frac{(-1)^n}{n}\right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ Harmonik seri ıraksak. O halde alt. seri şartlı yakınsak.

$x=7 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(7-5)^n}{n\cdot 2^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n\cdot 2^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ Harmonik seri ıraksak

Yak. aralığı : $[3,7)$

Ör/ $\sum_{n=0}^{\infty} \underbrace{\frac{x^n}{n!}}_{u_n}$ serisinin yakınsaklık aralığını bulunuz.

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{x^{\cancel{n}+1}}{(n+1)!}\cdot\frac{n!}{x^{\cancel{n}}}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{x}{n+1}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{1}{n+1}\right|.\,|x| = 0.|x| = 0 < 1.$$

Seri tüm x değerleri için yakınsaktır. Yakınsaklık yarıçapı ∞'dur.

Ör/ $\sum_{n=0}^{\infty} n!.x^n$ serisinin yakınsaklık aralığını bulunuz.

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{(n+1)!\;x^{n+1}}{n!\;x^n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|(n+1).x\right| = \infty.|x| = \infty > 1$$

Seri sadece yakınsaklık merkezi olan x=0'da yakınsaktır. Yakınsaklık yarıçapı sıfırdır.

Ör/ $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2x+5)^n}{(n^2+1).3^n}$ kuvvet serisinin yakınsaklık merkezini, yakınsaklık yarıçapını ve yakınsaklık aralığını bulunuz.

$\sum a_n (x-c)^n$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\left[2\left(x+\frac{5}{2}\right)\right]^n}{(n^2+1).3^n} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n\left(x+\frac{5}{2}\right)^n}{(n^2+1).3^n}$$

$x = -\frac{5}{2} \rightarrow$ yakınsaklık merkezi

$$\underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n \left(x+\frac{5}{2}\right)^n}{(n^2+1)\cdot 3^n}}_{u_n}$$

$$a_n = \frac{2^n}{(n^2+1)\cdot 3^n}$$

$$R = \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|} = \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{2^{\cancel{n}+1}}{[(n+1)^2+1]\cdot 3^{\cancel{n}+1}} \cdot \frac{(n^2+1)\cdot \cancel{3^n}}{\cancel{2^n}}\right|}$$

$$= \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{2(n^2+1)}{3[(n+1)^2+1]}\right|} = \frac{1}{\frac{2}{3}} = \frac{3}{2} \rightarrow \text{yakınsaklık yarıçapı.}$$

$$\Rightarrow \left|x+\frac{5}{2}\right| < \frac{3}{2} \Rightarrow -\frac{3}{2} < x+\frac{5}{2} < \frac{3}{2} \Rightarrow -4 \leq x \leq -1$$

$$x=-4 \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n\cdot\left(-4+\frac{5}{2}\right)^n}{(n^2+1)\cdot 3^n} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n\cdot\left(-\frac{3}{2}\right)^n}{(n^2+1)\cdot 3^n} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2+1} \quad \text{Alt. seri}$$

1°) $a_n \overset{?}{>} a_{n+1}$

$$n < n+1$$
$$n^2 < (n+1)^2$$
$$n^2+1 < (n+1)^2+1$$
$$\frac{1}{n^2+1} > \frac{1}{(n+1)^2+1} \quad \checkmark$$

2°) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n \overset{?}{=} 0$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^2+1} = 0 \quad \checkmark$$

Alt. seri yak.

3°) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\left|\frac{(-1)^n}{n^2+1}\right| = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n^2+1} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2+1}$

$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ p-serisi $p=2>1$ yakınsak.

$\dfrac{1}{n^2+1} < \dfrac{1}{n^2}$ $\forall n$ için O halde seri yak.

$$x=-1 \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n\left(-1+\frac{5}{2}\right)^n}{(n^2+1).\ 3^n} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n.\left(\frac{3}{2}\right)^n}{(n^2+1).\ 3^n} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n^2+1}$$

Seri $[-4,-1]$ aralığında mutlak yakınsaktır.

Ör/ $\underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n.(x+2)^n}{n.3^n}}_{u_n}$ kuvvet serisinin mutlak yakınsak, şartlı yakınsak ve ıraksak olduğu aralıkları belirleyiniz.

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{(-1)^{\cancel{n}+1}(x+2)^{\cancel{n}+1}}{(n+1).\ 3^{\cancel{n}+1}} \cdot \frac{n.\ 3^{\cancel{n}}}{(-1)^{\cancel{n}}.(x+2)^{\cancel{n}}}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{n}{3(n+1)}.(x+2)\right| = \frac{1}{3}|x+2| < 1$$

$$|x+2| < 3$$

$-3 < x+2 < 3 \Rightarrow -5 < x < 1 \to$ serinin mutlak yak. old. aralık.

$$x=-5 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n.\ (-5+2)^n}{n.\ 3^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n.\ (-3)^n}{n.\ 3^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$$ Har. seri ıraksak

$$x=1 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n.\ (1+2)^n}{n.\ 3^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n.\ 3^n}{n.\ 3^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$$ Alt. Har. Seri (şartlı yakınsak)

Kuvvet serisi; $(-5,1)$ aralığında mutlak yakınsak, $x=1$'de şartlı yakınsak ve $(-\infty,-5]\cup(1,\infty)$ birleşim aralığında ıraksaktır.

Kuvvet Serileri Üzerinde Cebirsel İşlemler

Cebirsel işlemleri göstermek için yakınsaklık merkezi sıfır olan $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ şeklindeki serileri gözönüne alalım. $x = y - c$ dönüşümü yapılarak seri $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (y-c)^n$ şeklindeki seriye genişletilebilir.

Teorem : $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ ve $\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$ serileri sırasıyla R_a ve R_b yakınsaklık yarıçapına sahip iki seri ve $c \in \mathbb{R}$ bir sabit olsun. O zaman

1) $\sum_{n=0}^{\infty} (c.a_n) x^n$ serisinin yakınsaklık yarıçapı yine R_a 'dır. $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 'in yakınsadığı her yerde

$$\sum_{n=0}^{\infty} (ca_n) x^n = c \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$ şeklindedir.

2) $\sum_{n=0}^{\infty} (a_n \mp b_n) x^n$ serisinin yakınsaklık yarıçapı toplamda (veya farkta) bulunan serilerin yakınsaklık yarıçaplarının en küçüğünden daha küçük olamaz. $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ ve $\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$ serilerinin yakınsadığı her yerde

$$\sum_{n=0}^{\infty} (a_n \mp b_n) x^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \mp \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$$ 'dir.

3) $$\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n\right) = (a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots)(b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \cdots)$$

$$= \underbrace{a_0 b_0}_{c_0} + \underbrace{(a_0 b_1 + a_1 b_0)}_{c_1} x + \underbrace{(a_0 b_2 + a_1 b_1 + a_2 b_0)}_{c_2} x^2 + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$$

$$c_n = \sum_{j=0}^{n} a_j . b_{n-j}$$

Çarpım serisinin yakınsaklık yarıçapı toplam ve farkta olduğu gibi çarpımdaki serilerin yakınsaklık yarıçaplarının en küçüğünden daha küçük olamaz.

Ör/ $\sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1 + x + x^2 + \dots = \frac{1}{1-x} \qquad |x|<1$

$$\left(\frac{1}{1-x}\right)^2 = (1 + x + x^2 + \dots)(1 + x + x^2 + \dots) = 1 + 2x + 3x^2 + \dots$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) \cdot x^n$$

4) $\dfrac{\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n}{\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n} = \dfrac{a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots}{b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \dots}$

$$\frac{1}{1-x} = \frac{1 + 0 \cdot x + 0 \cdot x^2 + \dots}{1 + (-1) \cdot x + 0 \cdot x^2 + \dots} = \underbrace{1 + x + x^2 + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} x^n}$$ $|x|<1$ için yak.

$1 : R_a \to \infty$
$1-x : R_b \to \infty$ } Her yerde yak.

R yak. yarıçapı olsun. $R = 1$

Bölüm serisinin katsayılarını belirlemek için basit bir kural yoktur. R_a ve R_b sırasıyla pay ve paydadaki serilerin yakınsaklık yarıçapları ve R_c yakınsaklık merkezinden paydadaki serinin toplamının "0" olduğu en yakın kompleks sayıya olan uzaklık olmak üzere bölüm serisinin yakınsaklık yarıçapı R, R_a, R_b ve R_c sayılarının en küçüğünden küçük olamaz.

$$R \geq \min\{R_a, R_b, R_c\}$$

Kuvvet Serilerinin Türetilmesi ve İntegre Edilmesi

Eğer bir kuvvet serisinin yakınsaklık yarıçapı pozitif ise seri terim terim türetilebilir ve integre edilebilir.

Teorem: $R>0$ olmak üzere eğer $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots$ serisi $(-R, R)$ aralığında $f(x)$ toplamına yakınsıyorsa yani $f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ ise;

1) $f(x)$, $(-R,R)$ aralığı üzerinde türevlenebilirdir.

$$f'(x) = a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2 + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}$$

2) $f(x)$, $(-R,R)$ aralığının her kapalı alt aralığında integre edilebilirdir ve her $x \in (-R,R)$ için

$$\int_0^x f(t)\,dt = \int_0^x (a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + \cdots)\,dt = a_0 t + a_1 \frac{t^2}{2} + a_2 \frac{t^3}{3} + \cdots \Big|_0^x = a_0 x + a_1 \frac{x^2}{2} + a_2 \frac{x^3}{3} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{x^{n+1}}{n+1}$$

Terim terim türetilmiş ya da İntegre edilmiş serilerin yakınsaklık yarıçapları için aşağıdaki yorumları yaparız:

i) Türetilmiş serinin yakınsaklık aralığı orjinal seri kendi yakınsaklık aralığının uç noktalarında yakınsıyorsa bile muhtemelen bu uç noktalardan biri veya her ikisi dışında orjinal serinin yakınsaklık aralığı ile aynıdır.

ii) İntegre edilmiş seri, orjinal serinin yakınsaklık aralığının her yerinde ve muhtemelen orjinal seri uç noktalarda yakınsamasa bile bu aralığın uç noktalarının biri veya her ikisinde de yakınsaktır.