Parametrik Denklemler ve Kutupsal Koordinatlar

Parametrik Denklemler

Eğrileri, fonksiyon veya denklemlerin x ve y gibi iki değişkenli grafikleri olarak inceledik. Bir eğriyi, her iki koordinatı başka bir t değişkeninin fonksiyonu olarak ifade eden yeni bir yöntemle inceleyeceğiz.

Tanım: Eğer x ve y koordinatları t değişkeninin I aralığında $x=f(t)$, $y=g(t)$ şeklinde tanımlanmış fonksiyonları ise o zaman bu denklemlerle tanımlanan $(x,y)=(f(t),g(t))$ noktalar kümesi bir parametrik eğridir. $x=f(t)$, $y=g(t)$ denklemlerine eğri için parametrik denklemler, t değişkenine eğri için bir parametre ve tanım kümesi olan I'ya da parametre aralığı denir.

Eğer parametre aralığı $I=[a,b]$ şeklinde ise $(f(a),g(a))$ eğrinin başlangıç noktası, $(f(b),g(b))$ bitim noktası olacaktır.

$$\boxed{\begin{matrix} x=f(t) \\ y=g(t) \end{matrix} \quad , \quad a \le t \le b} \longrightarrow \text{Eğrinin bir parametrizasyonu}$$

$$\left.\begin{matrix} x=f(t) \\ y=g(t) \end{matrix}\right\} \text{Eğrinin parametrik denklemleri}$$

$t \rightarrow$ parametre

$t \in I \rightarrow$ parametre aralığı

ÖRNEKLER

1°) Bir doğrunun parametrik denklemi

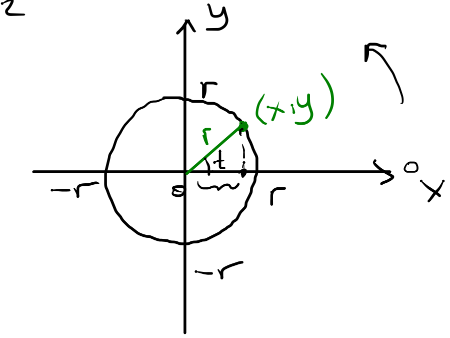
$P_0(x_0, y_0)$, $P_1(x_1, y_1)$ noktalarından geçen doğruyu gözönüne alalım:

$$\frac{x-x_0}{x_1-x_0} = \frac{y-y_0}{y_1-y_0} = t \Rightarrow \left.\begin{aligned} x &= x_0 + t(x_1-x_0) \\ y &= y_0 + t(y_1-y_0) \end{aligned} \quad -\infty < t < \infty \right\}$$

P_0, P_1 noktalarından geçen bir doğrunun bir parametrizasyonudur.

2°) Çemberin parametrik denklemi

$x^2+y^2=r^2$



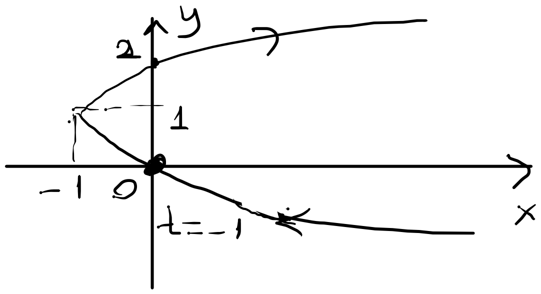
- $x = r\cos t$, $y = r\sin t$ $\quad 0 \le t \le 2\pi$
- $x = t$, $y = \sqrt{r^2 - t^2}$ $\quad -r \le t \le r$
- $x = r\sin t$, $y = r\cos t$ $\quad 0 \le t \le 2\pi$
- $x = t-1$, $y = \sqrt{r^2 - (t-1)^2}$ $\quad 1-r \le t \le 1+r$

3) Elipsin parametrik denklemleri $\left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \right)$

$$\left.\begin{array}{l} x = a\cos t \\ y = b\sin t \end{array} \quad 0 \leq t \leq 2\pi \right\} \quad \frac{a^2\cos^2 t}{a^2} + \frac{b^2\sin^2 t}{b^2} = \cos^2 t + \sin^2 t = 1$$

4) $\left.\begin{array}{l} x = t^2 - 1 \\ y = t + 1 \end{array} \quad (-\infty < x < \infty) \right\}$ parametrizasyonu ile verilen eğriyi tanımlayınız.

$$y = t+1 \Rightarrow t = y-1 \Rightarrow x = (y-1)^2 - 1 = y^2 - 2y \Rightarrow x = y^2 - 2y \text{ parabol}$$



$t = -1 \Rightarrow \begin{array}{l} x = 0 \\ y = 0 \end{array}$

$t = 0 \Rightarrow \begin{array}{l} x = -1 \\ y = 1 \end{array}$

$t = 1 \Rightarrow \begin{array}{l} x = 0 \\ y = 2 \end{array}$

5) $\left.\begin{array}{l} x = t + \frac{1}{t} \\ y = t - \frac{1}{t} \end{array} \right\} (t > 0)$ parametrizasyonu ile verilen eğriyi tanımlayınız.

$$x - y = \frac{2}{t} \qquad x + y = 2t \Rightarrow (x-y)(x+y) = \frac{2}{t} \cdot 2t \Rightarrow x^2 - y^2 = 4 \quad \text{Hiperbol}$$

- $y = t \qquad x = \sqrt{4+t^2} \qquad -\infty < t < \infty$

- $\left.\begin{aligned} x &= 2\sec t \\ y &= 2\tan t \end{aligned}\right\} \quad -\frac{\pi}{2} < t < \frac{\pi}{2}$

$$[F \circ g(x)]' = g'(x) \cdot F'[g(x)]$$

$$\begin{aligned} x^2 - y^2 &= 4\sec^2 t - 4\tan^2 t \\ &= 4(1+\tan^2 t) - 4\tan^2 t \\ &= 4 + \cancel{4\tan^2 t} - \cancel{4\tan^2 t} \\ &= 4 \end{aligned}$$

Teğetler ve Alanlar

Eğer f ve g fonksiyonları bir t noktasında türevlenebilir ise $x=f(t)$, $y=g(t)$ fonksiyonları da t noktasında türevlenebilirler. x ve y bir parametrik eğriyi gösteriyorsa bu türevlenebilir eğri üzerindeki bir noktada y de x'in türevlenebilir fonksiyonu olduğunda $\frac{dy}{dt}$, $\frac{dx}{dt}$ ve $\frac{dy}{dx}$ türevleri arasındaki ilişki zincir kuralı ile verilir.

$y = F(x) = F(f(t)) = g(t)$

$x = f(t)$

1. yol $\quad \frac{dy}{dt} = \frac{dx}{dt} \cdot \frac{dy}{dx} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{dy/dt}{dx/dt} = \frac{\dot{y}}{\dot{x}}$

2. yol $\quad \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dx} \cdot \frac{dt}{dt} = \frac{dy}{dt} \cdot \frac{dt}{dx} = \frac{dy}{dt} \cdot \frac{1}{\frac{dx}{dt}} = \frac{dy/dt}{dx/dt} = \frac{\dot{y}}{\dot{x}}$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left[\frac{dy}{dx}\right]\cdot\frac{dt}{dt} = \frac{d}{dt}\left[\frac{dy}{dx}\right]\cdot\frac{dt}{dx} = \frac{d}{dt}\left[\frac{dy/dt}{dx/dt}\right]\cdot\frac{1}{\frac{dx}{dt}}$$

$$= \frac{\frac{d^2y}{dt^2}\cdot\frac{dx}{dt} - \frac{d^2x}{dt^2}\cdot\frac{dy}{dt}}{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2}\cdot\frac{1}{\frac{dx}{dt}} = \frac{\ddot{y}\,\dot{x} - \ddot{x}\,\dot{y}}{(\dot{x})^3}$$

Örnekler:

1) $\left.\begin{array}{l} x=\sec t \\ y=\tan t \end{array} \quad -\frac{\pi}{2}<t<\frac{\pi}{2}\right\}$ parametrizasyonu ile verilen eğrinin $(\overset{x}{\sqrt{2}}, \overset{y}{1})$ noktasındaki teğetinin eğimini bulunuz.

$$y' = \frac{\dot{y}}{\dot{x}} = \frac{\sec^{\cancel{2}} t}{\cancel{\sec t}\cdot\tan t} = \frac{\sec t}{\tan t} = \frac{1}{\sin t}$$

$$t=\pi/4 \left\{\begin{array}{l} x=\sqrt{2} \Rightarrow \sec t=\sqrt{2} \Rightarrow \cos t=\frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow t=\frac{\pi}{4}+2k\pi \quad k=0,\mp1,\mp2,\ldots \\ y=1 \Rightarrow \tan t=1 \Rightarrow t=\frac{\pi}{4}+k\pi \quad k=0,\mp1,\mp2,\ldots \end{array}\right.$$

$\dot{y} = 1+\tan^2 t = \sec^2 t$

$\dot{x} = \sec t\cdot\tan t$

$$y'\Big|_{t=\frac{\pi}{4}} = \frac{1}{\sin\frac{\pi}{4}} = \sqrt{2}$$

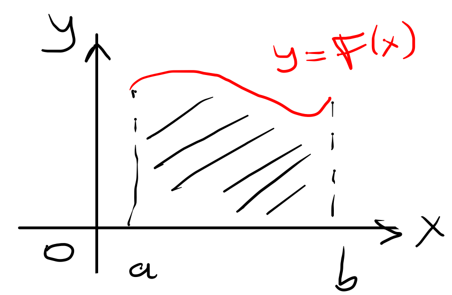
2) $\left.\begin{aligned} x &= t - t^2 \\ y &= t - t^3 \end{aligned}\right\} \Rightarrow y'' = ?$ $\quad \dot{x} = 1 - 2t \quad \ddot{x} = -2 \qquad \dot{y} = 1 - 3t^2 \quad \ddot{y} = -6t$

$$y'' = \frac{\ddot{y}\dot{x} - \ddot{x}\dot{y}}{(\dot{x})^3} = \frac{-6t\cdot(1-2t) + 2\cdot(1-3t^2)}{(1-2t)^3} = \frac{6t^2 - 6t + 2}{(1-2t)^3} = \frac{6\left[\frac{y}{x} - 1\right]^2 - 6\left[\frac{y}{x} - 1\right] + 2}{\left[1 - 2\left(\frac{y}{x} - 1\right)\right]^3}$$

$x = t(1-t)$

$y = t(1-t^2) = t(1-t)(1+t)$

$\frac{y}{x} = 1 + t \Rightarrow \boxed{t = \frac{y}{x} - 1}$



$$A = \int_a^b y\, dx = \int_{t_1}^{t_2} g(t) \cdot f'(t)\, dt$$

$x = f(t) \Rightarrow dx = f'(t)\, dt \qquad x = a \Rightarrow t_1$

$y = g(t) \qquad\qquad x = b \Rightarrow t_2$

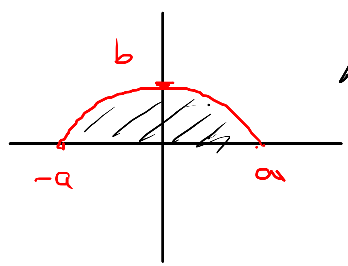
3) $\left.\begin{aligned} x &= a\cos t \\ y &= b\sin t \end{aligned}\right.$ $\quad 0 \le t \le \pi \Big\}$ şeklinde parametrize edilen bölgenin alanını bulunuz.

$t = 0 \Rightarrow x = a,\ y = 0$

$t = \pi \Rightarrow x = -a,\ y = 0$

$t = \frac{\pi}{2} \Rightarrow x = 0,\ y = b$

$dx = -a\sin t$



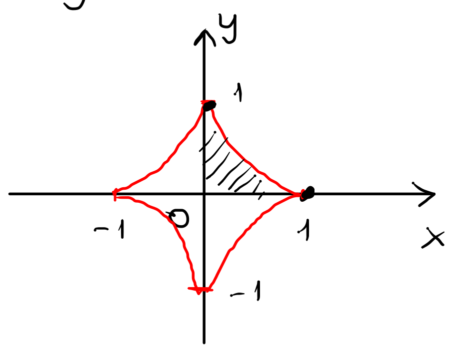
$$A = 2\int_0^a y\, dx = 2\int_{\pi/2}^0 b\sin t\,(-a\sin t)\, dt$$

$$= 2ab\int_0^{\pi/2} \sin^2 t\, dt = 2ab\int_0^{\pi/2} \frac{1-\cos 2t}{2}\, dt$$

$$= ab\int_0^{\pi/2} dt - ab\int_0^{\pi/2} \cos 2t\, dt = ab\, t\Big|_0^{\pi/2} - \frac{ab}{2}\sin 2t\Big|_0^{\pi/2}$$

$= ab\left[\frac{\pi}{2}-0\right] - \frac{ab}{2}\left[\sin\pi - \sin 0\right] = \frac{ab\pi}{2}\ br^2$

4) $x=\cos^3 t$, $y=\sin^3 t$, $0\le t\le 2\pi$ } şeklinde parametrize edilen astroid eğrisinin sınırladığı bölgenin alanını bulunuz.



$x^{2/3}+y^{2/3}=1$

$dx=-3\cos^2 t.\sin t\ dt$

$t=0 \Rightarrow x=1,\ y=0$ $\qquad t=\frac{\pi}{2} \Rightarrow x=0,\ y=1$ $\qquad t=\pi \Rightarrow x=-1,\ y=0$

$t=\frac{3\pi}{2} \Rightarrow x=0,\ y=-1$ $\qquad t=2\pi \Rightarrow x=1,\ y=0$

$$A=4\int_{\pi/2}^{0}\sin^3 t.\left(-3\cos^2 t\ \sin t\right)dt = 12\int_0^{\pi/2}\sin^4 t\ .\cos^2 t\ dt = 12\int_0^{\pi/2}\left(\frac{1-\cos 2t}{2}\right)^2.\left(\frac{1+\cos 2t}{2}\right)dt$$

$$=\frac{3\pi}{8}\ br^2$$

Parametrik Olarak Tanımlı Eğrinin Uzunluğu

Eğer c eğrisi $x=f(t)$, $y=g(t)$ denklemleri ile $a\le t\le b$ aralığında parametrik olarak tanımlanıyorsa (f' ve g', $[a,b]$ aralığında sürekli ve aynı anda sıfır olmayan fonksiyonlar) ve $t=a$'dan $t=b$'ye artarken c eğrisi üzerinden sadece bir kez geçiliyorsa bu durumda c eğrisinin uzunluğu

$$s = \int_a^b \sqrt{1+[f'(x)]^2}\, dx = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{1+\left(\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}\right)^2} \cdot f'(t)\, dt = \int_{t_1}^{t_2} \frac{\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2}}{\frac{dx}{dt}} \cdot f'(t)\, dt$$

$$= \int_{t_1}^{t_2} \frac{\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2}}{\cancel{f'(t)}} \cdot \cancel{f'(t)}\, dt$$

$$= \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\, dt$$

1°) $\left.\begin{array}{l} x = a \\ x = b \end{array}\right\}$ t değerleri hesaplanır.

2°) $F'(x) = \dfrac{\dot{y}}{\dot{x}} = \dfrac{dy/dt}{dx/dt}$

$x = f(t) \Rightarrow dx = f'(t)\, dt \Rightarrow \dfrac{dx}{dt} = f'(t)$

$y = g(t)$

Ör: $\left.\begin{array}{l} x = \cos t \\ y = \sin t \end{array} \quad 0 \le t \le 2\pi \right\}$ parametrizasyonu ile verilen birim çemberin uzunluğunu bulunuz.

$\left.\begin{array}{l} \dfrac{dx}{dt} = -\sin t \\ \dfrac{dy}{dt} = \cos t \end{array}\right\} \Rightarrow s = \int_0^{2\pi} \sqrt{(\sin t)^2 + (\cos t)^2}\,.\, dt = \int_0^{2\pi} dt = t\Big|_0^{2\pi} = 2\pi$ br

Ör/ $x=\cos^3 t$, $y=\sin^3 t$, $0\le t\le 2\pi$ } parametrizasyonu ile verilen astroid eğrisinin uzunluğunu bulunuz.

$$\frac{dx}{dt}=-3\cos^2 t\sin t$$

$$\frac{dy}{dt}=3\sin^2 t\cos t$$

$$s=4\int_0^{\pi/2}\sqrt{(-3\cos^2 t\sin t)^2+(3\sin^2 t\cos t)^2}\,dt$$

$$=4\int_0^{\pi/2}\sqrt{9\cos^4 t\sin^2 t+9\sin^4 t\cos^2 t}\,dt$$

$$=4\int_0^{\pi/2}\sqrt{9\cos^2 t\sin^2 t\,(\cos^2 t+\sin^2 t)}\,dt$$

$$=4\int_0^{\pi/2}\sqrt{9\cos^2 t\sin^2 t}\,dt=12\int_0^{\pi/2}\cos t\sin t\,dt$$

$\sin t=u$

$\cos t\,dt=du$

$t=0\Rightarrow u=0$

$t=\pi/2\Rightarrow u=1$

$$=12\int_0^1 u\,du=6u^2\Big|_0^1=6\ \text{br}$$