

Paydadaki 1. ve 2. dereceden carpanların tekrarlanması durumu:

Eğer paydadaki  $Q(x)$  polinomunun herhangi bir 1. dereceden (Lineer) veya 2. dereceden (kuadratik) carpanlarından biri örneğin  $m$  kez tekrarlanmış ise o zaman  $\frac{P(x)}{Q(x)}$ 'in basit kesirlere ayrılığında bu carpana karşılık  $m$  tane farklı kesir karşı gelecektir.

Bu kesirlerin paydalarının üsleri 1'den  $m$ 'ye doğru artarken, tekrarlı carpan lineer ise pay sabit, kuadratik ise pay lineer (1. dereceden) bir fonksiyon olacaktır.

Örneğin;  $(x-a_1)$  carpanı  $m$  kez tekrarlansın;

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{P(x)}{(x-a_1)^m (x-a_2) \dots (x-a_n)} = \frac{A_1}{x-a_1} + \frac{A_2}{(x-a_1)^2} + \dots + \frac{A_m}{(x-a_1)^m} + \frac{A_{m+1}}{x-a_2} + \dots + \frac{A_{n+m}}{x-a_n}$$

Ör/  $\int \frac{dx}{x(x-1)^2} = \int \left[ \frac{1}{x} - \frac{1}{x-1} + \frac{1}{(x-1)^2} \right] dx = \int \frac{dx}{x} - \int \frac{dx}{x-1} + \int \frac{dx}{(x-1)^2} = \ln|x| - \ln|x-1| - \frac{1}{x-1} + C$

$$\frac{1}{x(x-1)^2} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-1} + \frac{C}{(x-1)^2}$$

$$\frac{1}{x(x-1)^2} = \frac{A(x-1)^2 + Bx(x-1) + Cx}{x(x-1)^2} \Rightarrow \begin{aligned} A(x^2 - 2x + 1) + Bx^2 - Bx + Cx &\equiv 1 \\ (A+B)x^2 + (-2A-B+C)x + A &\equiv 1 \\ A=1 \quad A+B=0 \quad -2A-B+C=0 \\ B=-1 \quad C=1 \end{aligned}$$

0.1/  $\int \frac{(x^2+3)}{x^2(x^2+1)^2} dx = \int \left[ \frac{-6}{x} + \frac{3}{x^2} + \frac{6x-3}{x^2+1} + \frac{6x+4}{(x^2+1)^2} \right] dx = -6 \int \frac{dx}{x} + 3 \int \frac{dx}{x^2} + \frac{6}{2} \int \frac{2x dx}{x^2+1} - 3 \int \frac{dx}{x^2+1}$

$$\frac{x^2+3}{x^2(x^2+1)^2} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{Cx+D}{x^2+1} + \frac{Ex+F}{(x^2+1)^2}$$

$$\left. \begin{array}{l} x^2+1=u \\ 2x dx=du \\ x dx=\frac{du}{2} \end{array} \right\}$$

$$+ 6 \int \frac{x dx}{(x^2+1)^2} + 4 \int \frac{dx}{(x^2+1)^2}$$

$$= -6 \ln|x| + 3 \left(-\frac{1}{x}\right) + 3 \ln(x^2+1)$$

$$- 3 \arctan x + 6 \int \frac{\frac{du}{2}}{u^2}$$

$$x^2+3 \equiv A x (x^2+1)^2 + B (x^2+1)^2 + (Cx+D) x^2 (x^2+1) + (Ex+F) x^2$$

$$x^2+3 \equiv A x (x^4+2x^2+1) + B (x^4+2x^2+1) + (Cx+D) (x^4+x^2) + E x^3 + F x^2$$

$$x^2+3 \equiv A x^5 + 2A x^3 + A x + B x^4 + 2B x^2 + B + C x^5 + C x^3 + D x^4 + D x^2 + E x^3 + F x^2$$

$$x^2+3 \equiv (A+C) x^5 + (B+D) x^4 + (2A+C+E) x^3 + (D+F) x^2 + (A+2B) x + B$$

$$A+C=0$$

$$B+D=0$$

$$2A+C+E=0$$

$$D+F=1$$

$$A+2B=0$$

$$B=3 \Rightarrow A=-6 \Rightarrow C=6 \Rightarrow E=6$$

$$D=-3 \Rightarrow F=4$$

$$\begin{array}{l} x = \tan t \\ dx = \sec^2 t dt \end{array}$$

$$\int \frac{(x^2+3)}{x^2(x^2+1)^2} dx = \int \left[ \frac{-6}{x} + \frac{3}{x^2} + \frac{6x-3}{x^2+1} + \frac{6x+4}{(x^2+1)^2} \right] dx$$

$$= -6 \int \frac{dx}{x} + 3 \int \frac{dx}{x^2} + \frac{6}{2} \int \frac{2x dx}{x^2+1} - 3 \int \frac{dx}{x^2+1} + 6 \int \frac{x dx}{(x^2+1)^2} + 4 \int \frac{dx}{(x^2+1)^2}$$

$$= -6 \ln|x| + 3 \left(-\frac{1}{x}\right) + 3 \ln(x^2+1) - 3 \arctan x + 6 \int \frac{\frac{du}{2}}{u^2} + 4 \int \frac{\sec^2 t dt}{(\tan^2 t + 1)^2} \rightarrow \sec^4 t$$

$$= -6 \ln|x| - \frac{3}{x} + 3 \ln(x^2+1) - 3 \arctan x + 3 \left(-\frac{1}{u}\right) + 4 \int \cos^2 t dt$$

$$= -6 \ln|x| - \frac{3}{x} + 3 \ln(x^2+1) - 3 \arctan x - \frac{3}{x^2+1} + 4 \int \frac{1+\cos 2t}{2} dt$$

$$= -6 \ln|x| - \frac{3}{x} + 3 \ln(x^2+1) - 3 \arctan x - \frac{3}{x^2+1} + 2 \int dt + 2 \int \cos 2t dt$$

$$= -6 \ln|x| - \frac{3}{x} + 3 \ln(x^2+1) - 3 \arctan x - \frac{3}{x^2+1} + 2t + \sin 2t + C$$

$$= -6 \ln|x| - \frac{3}{x} + 3 \ln(x^2+1) - 3 \arctan x - \frac{3}{x^2+1} + 2 \arctan x + 2 \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} + C$$

$$\begin{aligned} x^2+1 &= u \\ 2x dx &= du \\ x dx &= \frac{du}{2} \end{aligned}$$

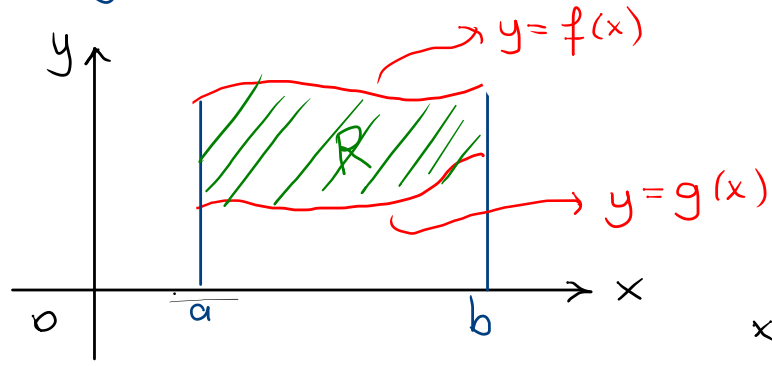
$$\begin{aligned} x &= \tan t \\ dx &= \sec^2 t dt \\ t &= \arctan x \end{aligned}$$

Öd/

$$\int \frac{x^2+2}{4x^5+4x^3+x} dx$$

## Düzlemsel bölgelerin alanları

iki eğri arasındaki alan



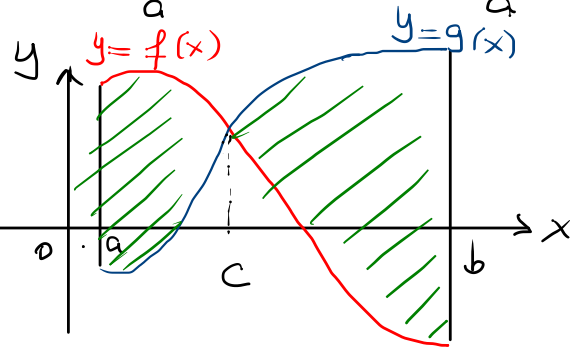
Bir düzlemsel  $R$  bölgesinin  $y=f(x)$ ,  $y=g(x)$  sürekli fonksiyonlarının grafiği ve dikey  $x=a$ ,  $x=b$  doğruları ile sınırlandığını kabul edelim.

$[a, b]$  aralığında  $g(x) \leq f(x)$  olduğunu da kabul edelim.

Bu durumda  $g$ 'nin grafiği  $f$ 'in grafiğinin altında kalacaktır.

Eğer  $[a, b]$ 'de  $g(x) \geq 0$  ise o zaman  $R$  bölgesinin alanı  $x$ -ekseninin üzerinde ve  $f$ 'in grafiğinin altında kalan alandan  $x$ -ekseninin üzerinde ve  $g$ 'nin grafiğinin altında kalan alanın çıkarılmasıyla elde edilir.

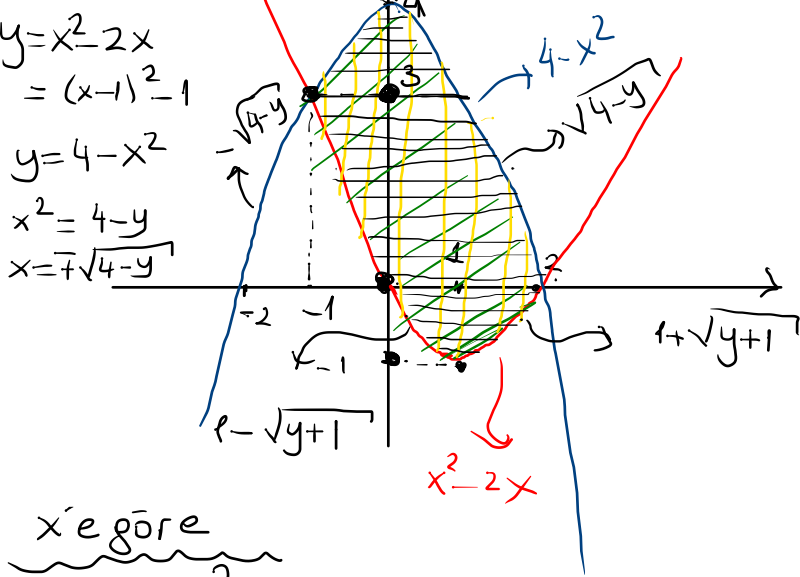
$$A = \int_a^b f(x) dx - \int_a^b g(x) dx = \int_a^b [f(x) - g(x)] dx$$



$$A = \int_a^b |f(x) - g(x)| dx$$

ÖRNEKLER -  $x = 1 \pm \sqrt{y+1}$

1)  $y = x^2 - 2x$  ve  $y = 4 - x^2$  eğrileri arasında kalan sınırlı düzlemsel R bölgesinin alanını bulunuz.



NOT: (Düzgün bölge)

Eksenlere dik doğrularla bölge tarandığında doğrular hep aynı eğriler arasında kalıyorsa bölgeye düzgün bölge denir.

Örnekteki grafikte sarı doğrular hep kırmızı ve mavi eğriler arasındadır. Dolayısıyla R bölgesi x-eksenine dik olan sarı doğrulara göre düzgündür. Ancak y-eksenine dik olan siyah doğrular önce iki kırmızı, sonra kırmızı ve mavi, daha sonra da mavi ve kırmızı eğriler arasında kaldığından R bölgesi y-eksenine göre düzgün değildir.

$$x^2 - 2x = 4 - x^2 \Rightarrow 2x^2 - 2x - 4 = 0$$

$$x^2 - x - 2 = 0$$

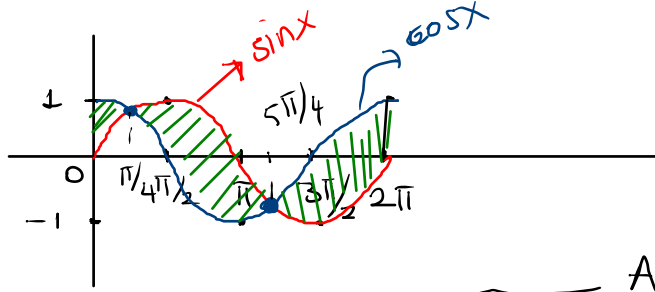
$$(x-2)(x+1) = 0$$

$$x = 2 \quad x = -1$$

$$= \int_{-1}^2 (-2x^2 + 2x + 4) dx = -2 \frac{x^3}{3} + x^2 + 4x \Big|_{-1}^2 = -\frac{2}{3} (8+1) + (4-1) + 4(2-(-1)) = -\frac{2}{3} \cdot 9 + 3 + 12 = 9 \text{ br}^2$$

$$A = \int_{-1}^0 [(1 + \sqrt{y+1}) - (1 - \sqrt{y+1})] dy + \int_0^3 [\sqrt{4-y} - (1 - \sqrt{y+1})] dy + \int_3^4 [\sqrt{4-y} - (-\sqrt{4-y})] dy$$

2)  $x=0$ 'dan  $x=2\pi$ 'ye  $y=\sin x$  ve  $y=\cos x$  eğrileri arasında kalan toplam alanı bulunuz.



$$\sin x = \cos x \Rightarrow \frac{\sin x}{\cos x} = 1 \quad \tan x = 1$$

$$x = \frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{4} \in [0, 2\pi]$$

$$A = \int_0^{2\pi} |\sin x - \cos x| dx = \int_0^{\pi/4} (\cos x - \sin x) dx + \int_{\pi/4}^{5\pi/4} (\sin x - \cos x) dx + \int_{5\pi/4}^{2\pi} (\cos x - \sin x) dx$$

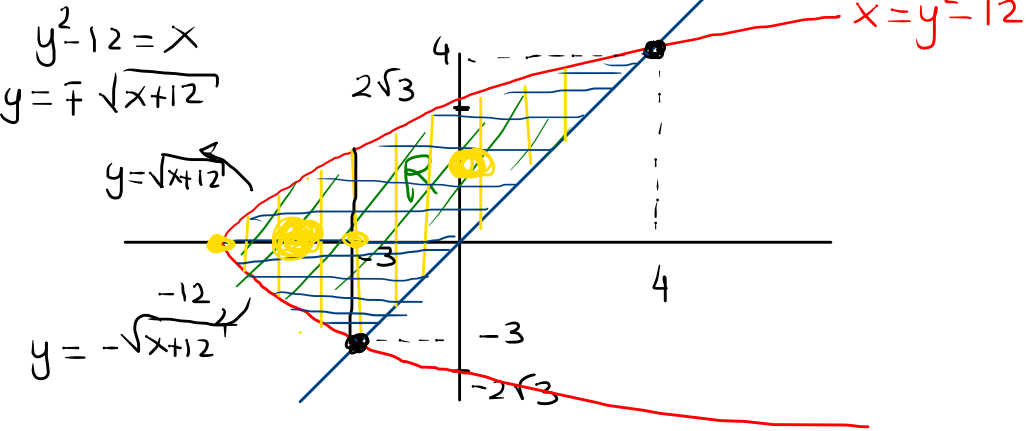
$$= \sin x + \cos x \Big|_0^{\pi/4} + (-\cos x - \sin x) \Big|_{\pi/4}^{5\pi/4} + (\sin x + \cos x) \Big|_{5\pi/4}^{2\pi}$$

$$= \left[ \left( \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \right) - (0+1) \right] - \left[ \left( -\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} \right) - \left( \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \right) \right] + \left[ (0+1) - \left( -\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} \right) \right]$$

$$= (\sqrt{2} - 1) - (-2\sqrt{2}) + (1 + \sqrt{2})$$

$$= 4\sqrt{2} \text{ br}^2$$

3)  $x = y^2 - 12$  parabolünün sağında ve  $y = x$  doğrusunun solunda kalan düzlemsel bölgenin alanını bulunuz.



$$y^2 - 12 = y$$

$$y^2 - y - 12 = 0$$

$$(y - 4)(y + 3) = 0$$

$$y = 4 \quad y = -3$$

$y = x$  doğrusunun solunda kalan düzlemsel bölgenin

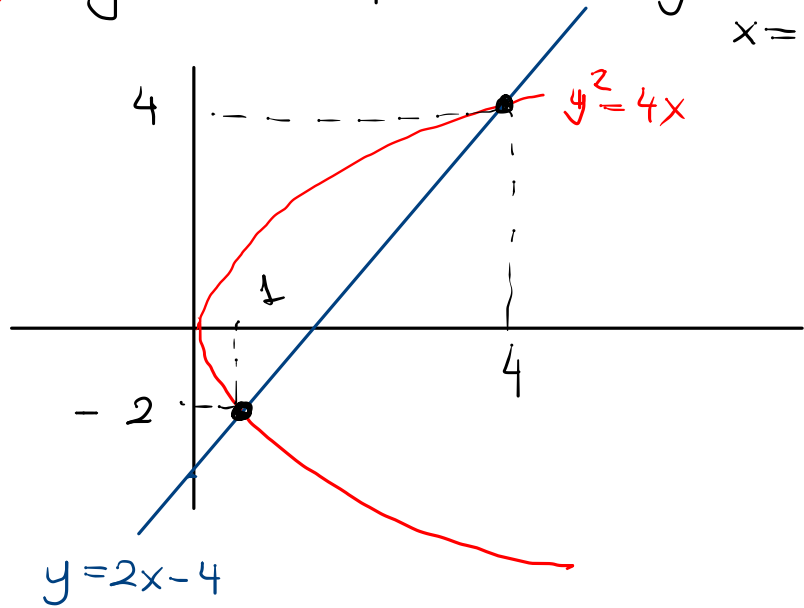
R bölgesi  $x$ 'e göre düzgün değildir. (•)

R bölgesi  $y$ 'ye göre düzgündür (•)

$$A = \int_{-3}^4 [y - (y^2 - 12)] dy = \left. \frac{y^2}{2} - \frac{y^3}{3} + 12y \right|_{-3}^4 = \frac{343}{6} \text{ br}^2$$

$$A = \int_{-12}^{-3} [\sqrt{x+12} - (-\sqrt{x+12})] dx + \int_{-3}^4 [\sqrt{x+12} - x] dx$$

ör/  $x = \frac{y^2}{4}$   
 $y^2 = 4x$  eğrisi ile  $y = 2x - 4$  doğrusu arasındaki alanı hesaplayınız.  
 $x = \frac{y+4}{2}$   
 $y$ 'ye göre düzgün.



$$(2x-4)^2 = 4x \Rightarrow 4x^2 - 16x + 16 = 4x$$

$$\Rightarrow 4x^2 - 20x + 16 = 0 \Rightarrow x^2 - 5x + 4 = 0$$

$$(x-1)(x-4) = 0$$

$$x=1 \quad x=4$$

$$A = \int_{-2}^4 \left[ \frac{y+4}{2} - \frac{y^2}{4} \right] dy$$

$x$ 'e göre düzgün  
 ?