TAM DİFERANSİYEL DENKLEMLER

$$P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy = 0$$

denklemindeki P ve Q fonksiyonları

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x} \qquad (1)$$

bağıntısını sağlıyorlarsa o zaman diferansiyel denklem tam diferansiyel denklemdir.

$P(x,y)$ ve $Q(x,y)$ fonksiyonları (1) şartını sağlıyorlarsa o zaman $P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy = 0$ dif. denkleminin sol tarafı bilinmeyen $u(x,y)$ fonksiyonunun toplam diferansiyeline eşittir.

Bu taktirde

$$du(x,y) = 0$$

olur. Böylece dif. denklemin genel çözümü

$$\int du(x,y) = \int 0 \Rightarrow \boxed{u(x,y) = c_1} \quad (2)$$

olarak elde edilir. Ancak $u(x,y)$ fonksiyonunun belirlenmesi gerekir.

$$P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy = du(x,y)$$

$$\Rightarrow \quad P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy = \frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial y}dy$$ 'dir.

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial x} &= P(x,y)\\ \frac{\partial u}{\partial y} &= Q(x,y)\end{aligned}\right\}$$ Bu eşitliklerin herhangi birinden yola çıkılarak $u(x,y)$ hesaplanabilir.

NOT: kısmi türev alınırken diğer değişken sabit olarak alındığından integral alırken de o değişkeni sabit gibi düşüneceğiz.

$$\frac{\partial u}{\partial x} = P(x,y) \Rightarrow \int \partial u = \int P(x,y)\,\partial x \Rightarrow u(x,y) = \int P(x,y)\,dx + h(y)$$

y'yi sabit aldık halbuki değil o nedenle int. sabitini y'ye bağlı bir fonk. olarak alalım.

$$\Rightarrow \boxed{u(x,y) = P_1(x,y) + h(y)} \Rightarrow \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial P_1(x,y)}{\partial y} + \frac{dh(y)}{dy}$$

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial y} &= Q(x,y)\\ \frac{\partial u}{\partial y} &= \frac{\partial P_1(x,y)}{\partial y} + \frac{dh(y)}{y}\end{aligned}\right\} \Rightarrow \frac{\partial P_1(x,y)}{\partial y} + \frac{dh(y)}{dy} = Q(x,y)$$

$$\Rightarrow \frac{dh(y)}{dy} = \underbrace{Q(x,y) - \frac{\partial P_1(x,y)}{\partial y}}_{\text{Sadece y'ye bağlı bir fonksiyon olmalı.}} = H(y)$$

(Yani bu farkta x'li terimler birbirini götürmeli)

$$\Rightarrow \frac{dh(y)}{dy} = H(y) \Rightarrow \int dh(y) = \int H(y)\,dy$$

$$h(y) = H_1(y) + c_2$$

$$u(x,y) = P_1(x,y) + h(y) \Rightarrow \boxed{u(x,y) = P_1(x,y) + H_1(y) + c_2} \quad (3)$$

(2) ve (3)'ten

$$P_1(x,y) + H_1(y) + c_2 = c_1 \qquad c_1 - c_2 = c$$

$$\Rightarrow \boxed{P_1(x,y) + H_1(y) = c}$$ Genel Çözüm.

Ör/ $\left(x^2 + \frac{y^2}{x}\right)dx + 2y\ln x\, dy = 0$ dif. denkleminin genel çözümünü bulunuz.

$$P(x,y) = x^2 + \frac{y^2}{x} \Rightarrow \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{2y}{x}$$

$$Q(x,y) = 2y\ln x \Rightarrow \frac{\partial Q}{\partial x} = 2y \cdot \frac{1}{x}$$

$=$ Denklem tam dif. denk.

$$\underbrace{\left(x^2+\frac{y^2}{x}\right)dx + 2y\ln x\, dy}_{} = 0 = du(x,y) = \underbrace{\frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial y}dy}_{}$$

$=$ (1)

$=$ (2)

(1)'den $\quad du(x,y) = 0 \Rightarrow \boxed{u(x,y) = c_1}$ (3)

(2)'den (4) $\dfrac{\partial u}{\partial x} = x^2 + \dfrac{y^2}{x} \Rightarrow \int \partial u = \int \left(x^2 + \dfrac{y^2}{x}\right)dx \Rightarrow u(x,y) = \dfrac{x^3}{3} + y^2\ln x + h(y)$ (6)

(5) $\dfrac{\partial u}{\partial y} = 2y\ln x$

(6)'dan y'ye göre türev alalım;

$$\frac{\partial u}{\partial y} = 2y\ln x + \frac{dh}{dy} \quad (7)$$

olur. (5) ve (7)'den $\quad \cancel{2y\ln x} = \cancel{2y\ln x} + \dfrac{dh}{dy} \Rightarrow \dfrac{dh}{dy} = 0 \Rightarrow \int dh = \int 0 \Rightarrow h = c_2$ (8)

(8)'i (6)'da yerine yazarsak;

$$\boxed{u(x,y) = \frac{x^3}{3} + y^2\ln x + c_2} \quad (9)$$

③ ve ⑨'dan

$$c_1 = \frac{x^3}{3} + y^2 \ln x + c_2 \Rightarrow \frac{x^3}{3} + y^2 \ln x = \underbrace{c_1 - c_2}_{c} \Rightarrow \boxed{\frac{x^3}{3} + y^2 \ln x = c}$$ Genel çözüm.

Ör/ $\frac{y}{x}\,dx + (y^3 + \ln x)\,dy = 0$ dif. denkleminin genel çözümünü bulunuz.

$$\left.\begin{array}{l} P(x,y) = \frac{y}{x} \\ Q(x,y) = y^3 + \ln x \end{array}\right\} \quad \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{1}{x} = \frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{1}{x}$$ $\Rightarrow$ Dif. denklem tam dif. denk.'dir.

$$\Rightarrow \quad \frac{y}{x}\,dx + (y^3 + \ln x)\,dy = 0 = du(x,y) = \frac{\partial u}{\partial x}\,dx + \frac{\partial u}{\partial y}\,dy$$

① $=$

② $=$

①'den $du(x,y) = 0 \Rightarrow \boxed{u(x,y) = c_1}$ ③

②'den ④ $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{y}{x} \Rightarrow \int \partial u = \int \frac{y}{x}\,dx \Rightarrow u(x,y) = y \ln x + h(y)$ ⑥

⑤ $\frac{\partial u}{\partial y} = y^3 + \ln x$

⑥'dan y'ye göre türev alırsak;

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \ln x + \frac{dh}{dy} \quad (7)$$

(5) ve (7)'den $\quad y^3 + \cancel{\ln x} = \cancel{\ln x} + \frac{dh}{dy} \Rightarrow \int dh = \int y^3 dy \Rightarrow h(y) = \frac{y^4}{4} + c_2 \quad (8)$

(8)'i (6)'da yerine yazarsak;

$$\boxed{u(x,y) = y\ln x + \frac{y^4}{4} + c_2} \quad (9)$$

(3) ve (9)'dan $\quad c_1 = y\ln x + \frac{y^4}{4} + c_2 \Rightarrow y\ln x + \frac{y^4}{4} = \underbrace{c_1 - c_2}_{c} \Rightarrow \boxed{y\ln x + \frac{y^4}{4} = c}$ G.Ç.

Ödev $\quad x\sec^2 y\, dy + (\tan y - 3x^2)\, dx = 0$ dif. denk. genel çöz. bulunuz.

Tam Hale Getirilebilen Denklemler (İntegrasyon Çarpanı)

$$P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy = 0$$

diferansiyel denklemi tam diferansiyel denklem değilse o zaman dif. denklemin her terimi $\lambda(x,y)$ gibi bir fonksiyon ile çarpılarak denklem tam dif. denklem haline getirilebilir.

Bu durumda elde edilen denklemin çözümü ile verilen denklemin çözümü aynı olur.

$$\underbrace{\lambda(x,y)\,P(x,y)}_{P_1(x,y)}\,dx + \underbrace{\lambda(x,y)\,Q(x,y)}_{Q_1(x,y)}\,dy = 0$$

$$\frac{\partial P_1}{\partial y} = \frac{\partial Q_1}{\partial x}$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\left[\underbrace{\lambda(x,y)\,P(x,y)}_{P_1}\right] = \frac{\partial \lambda}{\partial y}P(x,y) + \lambda(x,y)\frac{\partial P}{\partial y}$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left[\underbrace{\lambda(x,y)\,Q(x,y)}_{Q_1}\right] = \frac{\partial \lambda}{\partial x}Q(x,y) + \lambda(x,y)\cdot\frac{\partial Q}{\partial x}$$

$$\frac{\partial P_1}{\partial y} = \frac{\partial Q_1}{\partial x} \Rightarrow \frac{\partial \lambda}{\partial y}P(x,y) + \lambda(x,y)\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial \lambda}{\partial x}Q(x,y) + \lambda(x,y)\cdot\frac{\partial Q}{\partial x}$$

$$P(x,y)\frac{\partial \lambda}{\partial y} - Q(x,y)\frac{\partial \lambda}{\partial x} + \lambda\left(\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}\right) = 0$$

Bu denklem λ'ya göre birinci mertebeden kısmi türevli bir dif. denklemdir. λ'yı bulmak kolay değildir. Bu nedenle λ'nın özel durumlarını gözönüne alacağız.

1°) $\lambda = \lambda(x)$ olsun. O halde $\frac{\partial \lambda}{\partial y} = 0$'dır.

$$P(x,y)\underbrace{\frac{\partial \lambda}{\partial y}}_{=0} - Q(x,y)\frac{\partial \lambda}{\partial x} + \lambda\left(\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}\right) = 0 \Rightarrow -Q(x,y)\frac{\partial \lambda}{\partial x} + \lambda\left(\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}\right) = 0$$

$$\Rightarrow \int \frac{\partial \lambda}{\lambda} = \int \frac{\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}}{Q}\, dx \Rightarrow \ln \lambda = \int \frac{\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}}{Q}\, dx$$

$$\Rightarrow \boxed{\lambda = e^{\int \frac{\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}}{Q}\, dx}}$$

2°) $\lambda = \lambda(y)$ olsun. O halde $\frac{\partial \lambda}{\partial x} = 0$'dır.

$$P(x,y)\frac{\partial \lambda}{\partial y} - Q(x,y)\underbrace{\frac{\partial \lambda}{\partial x}}_{=0} + \lambda\left(\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}\right) = 0 \Rightarrow P(x,y)\frac{\partial \lambda}{\partial y} + \lambda\left(\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}\right) = 0$$

$$\Rightarrow \int \frac{\partial \lambda}{\lambda} = -\int \frac{\left(\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}\right)}{P} dy \Rightarrow \ln \lambda = \int \frac{\left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)}{P} dy$$

$$\Rightarrow \boxed{\lambda = e^{\int \frac{\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}}{P} dy}}$$

Ör/ $\underbrace{(x^2+y^2)}_{P} dx + \underbrace{xy}_{Q} dy = 0$ dif. denklemi tam dif. denklem midir? Değilse bir integrasyon çarpanı bularak genel çözümünü belirleyiniz.

$$\frac{\partial P}{\partial y} = 2y \neq \frac{\partial Q}{\partial x} = y$$ Tam dif. denklem değil.

$$\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x} = 2y - y = y$$

$\lambda = \lambda(x)$ olmalı:

$$\ln \lambda = \int \frac{\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}}{Q} dx \Rightarrow \ln \lambda = \int \frac{y}{xy} dx \Rightarrow \ln \lambda = \ln x$$

$$\boxed{\lambda = x}$$

$$x(x^2+y^2)\,dx + x(xy)\,dy = 0$$

$$\underbrace{(x^3+xy^2)}_{P_1}\,dx + \underbrace{(x^2y)}_{Q_1}\,dy = 0$$ Tam dif. denk.

$$\frac{\partial P_1}{\partial y} = 2xy = \frac{\partial Q_1}{\partial x} = 2xy$$

$$\Rightarrow (x^3+xy^2)\,dx + (x^2y)\,dy = 0 = du(x,y) = \frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial y}dy$$

= (1)

= (2)

(1)'den $du(x,y)=0 \Rightarrow \boxed{u(x,y) = c_1}$ (3)

(2)'den (4) $\frac{\partial u}{\partial x} = x^3+xy^2$

(5) $\frac{\partial u}{\partial y} = x^2y$

(5)'den $\frac{\partial u}{\partial y} = x^2y \Rightarrow \int \partial u = \int x^2y\,\partial y$

$u(x,y) = \frac{x^2y^2}{2} + h(x)$ (6)

(6)'dan x'e göre türev alalım;

$$\frac{\partial u}{\partial x} = xy^2 + \frac{dh}{dx} \quad (7)$$

(4) ve (7)'den $x^3 + \cancel{xy^2} = \cancel{xy^2} + \frac{dh}{dx} \Rightarrow \int dh = \int x^3\,dx \Rightarrow h(x) = \frac{x^4}{4} + C_2$ (8)

(8)'i (6)'da yerine yazarsak;

$$\boxed{u(x,y) = \frac{x^2y^2}{2} + \frac{x^4}{4} + C_2} \quad (9)$$

(3) ve (9)'dan $C_1 = \frac{x^2y^2}{2} + \frac{x^4}{4} + C_2 \Rightarrow \frac{x^2y^2}{2} + \frac{x^4}{4} = \underbrace{C_1 - C_2}_{C}$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{x^2y^2}{2} + \frac{x^4}{4} = C} \quad \text{G.Ç.}$$

Öd/ $(xy^2+y)\,dx + (2y-x)\,dy = 0$ dif. denkleminin genel çözümünü bulunuz.