İmproper İntegraller (Genelleştirilmiş İntegraller)

Belirli integrallerin $I=\int_a^b f(x)\,dx$ şeklinde olanlarını gözönüne almıştık. Bu integrallerde f kapalı ve sonlu $[a,b]$ aralığı üzerinde sürekli bir fonksiyondur. Böyle bir fonksiyon sınırlı olduğundan I integrali de sonlu bir sayı verir. Pozitif bir f fonksiyonu için bu integral, düzlemdeki, sınırlı bir bölgenin alanına karşılık gelir. Bu integralde mevcut olmayan olasılıkları içerecek şekilde genelleştirme yapabiliriz. Bu olasılıklar;

1°) İntegralin sınırları olan a ve b için
$a=-\infty$ veya $b=\infty$ veyahut her ikisi de söz konusu olabilir.

2°) a veya b veyahut her ikisinin yakın civarında ya da $[a,b]$ aralığındaki bir noktanın yakın civarında f sınırsız olabilir.

şeklindedir.

1°) durumu içeren integrallere 1. tip improper integraller (sonsuz integraller),
2°) durumu içeren integrallere de 2. tip improper integraller denir.

Bu integrallerin sonuçları sonlu bir sayı olabileceği gibi ∞, $-\infty$ veya integral mevcut olmayabilir. Eğer sonlu bir sayı elde ediliyorsa integrale yakınsaktır, integralin sonucu $-\infty,\infty$ ise veya integral mevcut değilse integrale ıraksaktır denir.

1. tip improper integraller

- Eğer f, $[a,\infty)$ aralığında sürekli ise o zaman f'in $[a,\infty)$ aralığında improper integrali

$$\int_a^\infty f(x)\,dx = \lim_{b\to\infty}\left[\int_a^b f(x)\,dx\right]$$

şeklinde hesaplanır.

- Eğer f, $(-\infty,b]$ aralığında sürekli ise o zaman f'in $(-\infty,b]$ aralığında improper integrali

$$\int_{-\infty}^b f(x)\,dx = \lim_{a\to-\infty}\left[\int_a^b f(x)\,dx\right]$$

şeklinde hesaplanır.

- Eğer f, $(-\infty,\infty)$ aralığında sürekli ise o zaman f'in $(-\infty,\infty)$ aralığında improper integrali

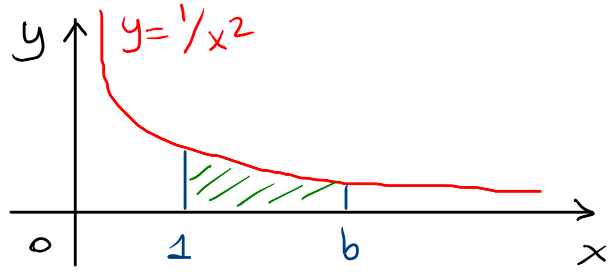
$$\int_{-\infty}^\infty f(x)\,dx = \int_{-\infty}^0 f(x)\,dx + \int_0^\infty f(x)\,dx = \lim_{a\to-\infty}\left[\int_a^0 f(x)\,dx\right] + \lim_{b\to\infty}\left[\int_0^b f(x)\,dx\right]$$

şeklinde hesaplanır.

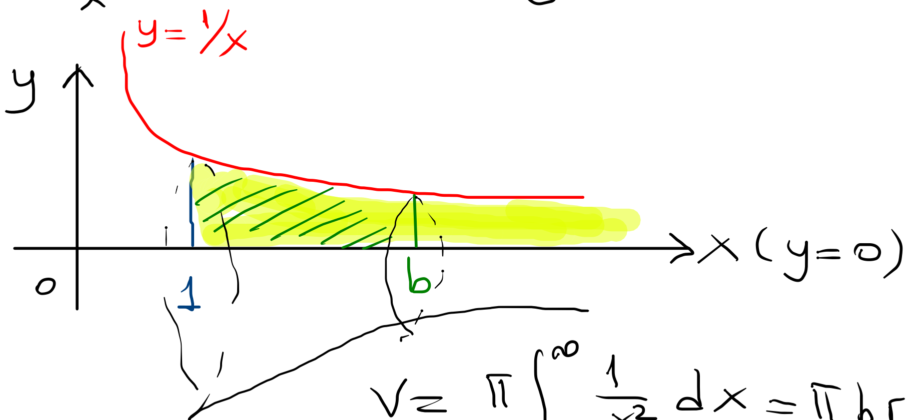
Ör/ $\int_1^\infty \frac{dx}{x^2} = \lim_{b\to\infty}\left[\int_1^b \frac{dx}{x^2}\right] = \lim_{b\to\infty}\left[-\frac{1}{x}\Big|_1^b\right] = \lim_{b\to\infty}\left[-\frac{1}{b}-(-1)\right]$

$= 0+1 = 1 < \infty$ (yakınsaktır)

Alan olarak düşünülürse;



Ör/ $y=\frac{1}{x}$ eğrisi altında $y=0$ üzerinde ve $x=1$'in sağında kalan bölgenin alanını bulunuz.



$V = \pi\int_1^\infty \frac{1}{x^2}\,dx = \pi b r^3$

$A = \int_1^\infty \frac{1}{x}\,dx = \lim_{b\to\infty}\left[\int_1^b \frac{dx}{x}\right]$

$= \lim_{b\to\infty}\left[\ln|x|\,\Big|_1^b\right]$

$= \lim_{b\to\infty}\left[\ln|b| - \underbrace{\ln 1}_{0}\right] = \ln\infty = \infty$

(ıraksak)

Ör/ $I=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dx}{1+x^2}=\int_{-\infty}^{0}\frac{dx}{1+x^2}+\int_{0}^{\infty}\frac{dx}{1+x^2}$

$$=\lim_{a\to-\infty}\left[\int_a^0\frac{dx}{1+x^2}\right]+\lim_{b\to\infty}\left[\int_0^b\frac{dx}{1+x^2}\right]$$

$$=\lim_{a\to-\infty}\left[\arctan x\Big|_a^0\right]+\lim_{b\to\infty}\left[\arctan x\Big|_0^b\right]$$

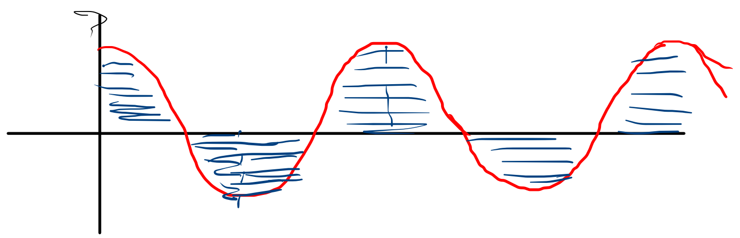
$$=\lim_{a\to-\infty}\left[\cancelto{0}{\arctan 0}-\arctan a\right]+\lim_{b\to\infty}\left[\arctan b-\cancelto{0}{\arctan 0}\right]$$

$$=-\arctan(-\infty)+\arctan(\infty)$$

$$=2\arctan(\infty)=\cancel{2}\cdot\frac{\pi}{\cancel{2}}=\pi \quad (\text{yakınsak})$$

Ör/ $\int_0^{\infty}\cos x\,dx=\lim_{b\to\infty}\left[\int_0^b\cos x\,dx\right]=\lim_{b\to\infty}\left[\sin x\Big|_0^b\right]=\lim_{b\to\infty}\left[\sin b-\cancelto{0}{\sin 0}\right]$

$=\sin\infty$ integralin değeri mevcut olmadığından integral ıraksaktır.



2. tip improper integraller

- Eğer f, $(a,b]$ aralığında sürekli ve a'nın yakın civarında sınırsız ise o zaman f'in bu aralıktaki improper integrali

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\varepsilon \to a^+} \left[\int_\varepsilon^b f(x)\,dx \right]$$

şeklinde hesaplanır.

- Eğer f, $[a,b)$ aralığında sürekli ve b'nin yakın civarında sınırsız ise o zaman f'in bu aralıktaki improper integrali

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\mu \to b^-} \left[\int_a^\mu f(x)\,dx \right]$$

şeklinde hesaplanır.

- Eğer f, (a,b) aralığında sürekli ve hem a'nın hem de b'nin yakın civarında sınırsız ise o zaman f'in bu aralıktaki improper integrali $c \in (a,b)$

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx = \lim_{\varepsilon \to a^+} \left[\int_\varepsilon^c f(x)\,dx \right] + \lim_{\mu \to b^-} \left[\int_c^\mu f(x)\,dx \right]$$

şeklinde hesaplanır.

- Eğer f, [a,b] aralığının bir noktası olan c dışında sürekli ve c de sınırsız ise o zaman f'in [a,b] aralığındaki improper integrali

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$$

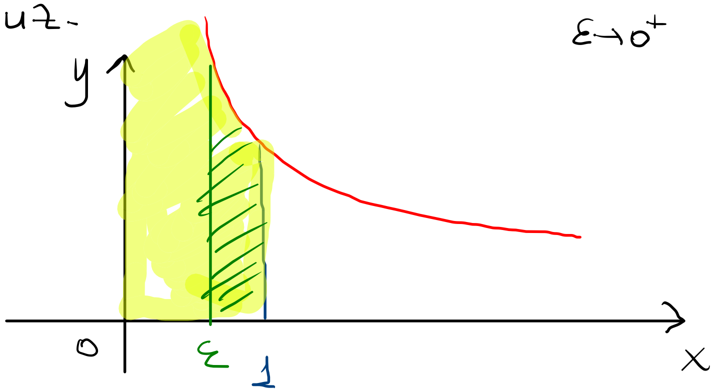
$$= \lim_{\mu \to c^-} \left[\int_a^{\mu} f(x)\,dx \right] + \lim_{\varepsilon \to c^+} \left[\int_{\varepsilon}^{b} f(x)\,dx \right]$$

şeklinde hesaplanır.

Ör: $y = \frac{1}{\sqrt{x}}$ eğrisinin altında, x-ekseninin üzerinde $x=0$ ile $x=1$ arasında kalan bölgenin alanını bulunuz.

$a=0$

$\varepsilon \to 0^+$



$$A = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}} = \lim_{\varepsilon \to 0^+} \int_{\varepsilon}^{1} \frac{dx}{\sqrt{x}} = \lim_{\varepsilon \to 0^+} \left(2\sqrt{x} \Big|_{\varepsilon}^{1} \right)$$

$$= \lim_{\varepsilon \to 0^+} \left[2 - 2\sqrt{\varepsilon} \right]$$

$$= 2 \text{ br}^2 \text{ (yakınsak)}$$

NOT: $\displaystyle\int_{-1}^{1}\frac{\ln|x|}{\sqrt{1-x}}\,dx=\int_{-1}^{0}\frac{\ln|x|}{\sqrt{1-x}}\,dx+\int_{0}^{1/2}\frac{\ln|x|}{\sqrt{1-x}}\,dx+\int_{1/2}^{1}\frac{\ln|x|}{\sqrt{1-x}}\,dx$

f'in tüm sınırsız olduğu noktalar için integral ayrı ayrı improper integrallere ayrılmalı.

$\displaystyle\int\frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}}=\arcsin\frac{x}{a}+c$

$\displaystyle\int\frac{dx}{a^2+x^2}=\frac{1}{a}\arctan\frac{x}{a}+c$

Ör/ $\displaystyle\int_0^2\frac{1}{\sqrt{2x-x^2}}\,dx=\int_0^1\frac{dx}{\sqrt{2x-x^2}}+\int_1^2\frac{dx}{\sqrt{2x-x^2}}$

$$=\lim_{a\to0^+}\int_a^1\frac{dx}{\sqrt{-(x^2-2x)}}+\lim_{b\to2^-}\int_1^b\frac{dx}{\sqrt{-(x^2-2x)}}$$

$$=\lim_{a\to0^+}\int_a^1\frac{dx}{\sqrt{-[(x-1)^2-1]}}+\lim_{b\to2^-}\int_1^b\frac{dx}{\sqrt{-[(x-1)^2-1]}}$$

$$=\lim_{a\to0^+}\int_a^1\frac{dx}{\sqrt{1-(x-1)^2}}+\lim_{b\to2^-}\int_1^b\frac{dx}{\sqrt{1-(x-1)^2}}$$

$$=\lim_{a\to0^+}\left[\arcsin(x-1)\Big|_a^1\right]+\lim_{b\to2^-}\left[\arcsin(x-1)\Big|_1^b\right]$$

$$=\lim_{a\to0^+}\left[\cancelto{0}{\arcsin 0}-\arcsin(a-1)\right]+\lim_{b\to2^-}\left[\arcsin(b-1)-\cancelto{0}{\arcsin 0}\right]$$

$$=\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2}=\pi \qquad \text{(Yakınsak)}$$

Ör/

$$\int_0^1 \underbrace{\ln x}_{u}\, \underbrace{dx}_{dv} = \lim_{a \to 0^+} \int_a^1 \ln x \, dx = \lim_{a \to 0^+} \left[x \ln x \Big|_a^1 - \int_a^1 \cancel{x} \cdot \frac{dx}{\cancel{x}} \right]$$

$\ln x = u$

$\frac{dx}{x} = du$

$dx = dv$

$x = v$

$$= \lim_{a \to 0^+} \left[1 . \cancelto{0}{\ln 1} - a . \ln a - \left(x \Big|_a^1 \right) \right]$$

$$= \lim_{a \to 0^+} \left[-a \ln a - (1 - a) \right]$$

$$= \infty \quad \text{(ıraksak)}$$

p-integralleri

$$\int_a^\infty \frac{dx}{x}$$

$0 < a < \infty$ ise o zaman

(1. tip)

a) $\displaystyle\int_a^\infty x^{-p}\,dx = \lim_{b\to\infty} \int_a^b \frac{dx}{x^p} = \lim_{b\to\infty} \left[\frac{x^{-p+1}}{-p+1} \Big|_a^b \right] = \lim_{b\to\infty} \left[\frac{b^{-p+1}}{-p+1} - \frac{a^{-p+1}}{-p+1} \right]$

$$= \begin{cases} \dfrac{a^{-p+1}}{p-1} & \text{(yak)} \quad p > 1 \text{ ise} \\ \infty & \text{(ırak)} \quad p \leq 1 \text{ ise} \end{cases}$$

(2. tip)

b) $\displaystyle\int_0^a x^{-p}\,dx = \int_0^a \frac{dx}{x^p} = \lim_{c\to 0^+} \int_c^a \frac{dx}{x^p} = \lim_{c\to 0^+} \left[\frac{x^{-p+1}}{-p+1} \Big|_c^a \right]$

$$= \lim_{c\to 0^+} \left[\frac{a^{-p+1}}{-p+1} - \frac{c^{-p+1}}{-p+1} \right] = \begin{cases} \infty \ \text{(ırak)} & p \geq 1 \\ \dfrac{a^{-p+1}}{1-p} \ \text{(yak)} & p < 1 \end{cases}$$

Ör/ $f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt{x}} , & 0 < x \le 1 \\ x-1 , & 1 < x \le 2 \end{cases}$ olmak üzere $\int_0^2 f(x)\,dx = ?$

$$\int_0^2 f(x)\,dx = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx + \int_1^2 (x-1)\,dx$$

$$= \underbrace{\int_0^1 \frac{dx}{x^{1/2}}}_{p\text{-int. } p \le 1 \text{ yak.}} + \left(\frac{x^2}{2} - x \Big|_1^2 \right) = \frac{1^{-\frac{1}{2}+1}}{-\frac{1}{2}+1} + \left[(2-2) - \left(\frac{1}{2} - 1\right) \right]$$

$$= 2 + \frac{1}{2} = \frac{5}{2}$$

Teorem: f ve g fonksiyonları $-\infty \le a < b \le \infty$ olmak üzere (a,b) aralığı üzerinde sürekli olsunlar ve $0 \le f(x) \le g(x)$ eşitsizliğini sağlasınlar.

- Eğer $\int_a^b g(x)\,dx$ yakınsak ise $\int_a^b f(x)\,dx$ de yakınsaktır.
- Eğer $\int_a^b f(x)\,dx$ ıraksak ise $\int_a^b g(x)\,dx$ de ıraksaktır.

Ör) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{dx}{\sqrt{x+x^3}}$ integralinin yakınsaklığını inceleyiniz.

$$\int_0^\infty \frac{dx}{\sqrt{x+x^3}} = \underbrace{\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x+x^3}}}_{I_1\,(2.\text{ tip})} + \underbrace{\int_1^\infty \frac{dx}{\sqrt{x+x^3}}}_{I_2\,(1.\text{ tip})}$$

$$I_1 : \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x+x^3}} \qquad f(x) = \frac{1}{\sqrt{x+x^3}} < \frac{1}{\sqrt{x}} \qquad \frac{1}{\sqrt{x+x^3}} < \frac{1}{\sqrt{x^3}}$$

i) $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}} = 2 \quad p = \frac{1}{2} < 1$ yak. $\Rightarrow$ $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x+x^3}}$ yak.

ii) $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x^3}} \quad p = \frac{3}{2} > 1$ ırak. $\times$ $\qquad \displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x+x^3}} < 2$

$$\int_1^\infty \frac{dx}{\sqrt{x+x^3}} \Rightarrow \quad f(x)=\frac{1}{\sqrt{x+x^3}} < \frac{1}{\sqrt{x}} \quad , \quad \frac{1}{\sqrt{x+x^3}} < \frac{1}{\sqrt{x^3}}$$

i) $\int_1^\infty \frac{dx}{\sqrt{x}}$ p-int.
$p=\frac{1}{2}<1$ ırak. $\times$

ii) $\int_1^\infty \frac{dx}{\sqrt{x^3}}$ p-int
$p=\frac{3}{2}>1$ yak $\Rightarrow \int_1^\infty \frac{dx}{\sqrt{x+x^3}} < 2$ yak.

$$= \frac{1^{-\frac{3}{2}+1}}{\frac{3}{2}-1}$$

$$= 2$$

$$\int_0^\infty \frac{dx}{\sqrt{x+x^3}} = \underset{\text{yak}}{I_1} + \underset{\text{yak}}{I_2} \rightarrow \text{yak.}$$

< 4