

~ SERİLER ~

Tanım: Bir kuralla birbirine bağılı sayılar dizisinin bütün terimlerinin toplamından elde edilen ifadeye seri denir.

Yani, $\{a_n\} = \{a_1, a_2, \dots, a_n, \dots\}$ dizisinin terimleri toplanarak $a_1 + a_2 + \dots + a_n + \dots$ serisi elde edilir ve $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ile gösterilir.

Örnekler:

$$1) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots$$

$$2) \frac{1}{2} + \frac{3}{4} + \frac{5}{6} + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n-1}{2n}$$

$$3) \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$$

$$4) \frac{1}{2} + \frac{1}{5} + \frac{1}{10} + \frac{1}{17} + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+1}$$

$$5) 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{7} + \frac{1}{15} + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n-1}$$

$$6) \frac{1+2\ln 2}{9} + \frac{1+3\ln 3}{14} + \frac{1+4\ln 4}{21} + \dots = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1+n\ln n}{n^2+5}$$

Not: Bir serinin ilk indisinin 1'den başlama zorunluluğu yoktur. Gerçekli olduğunda indis, uygun bir dönüşümle istenilen sayıdan başlatılabilir. Örneğin; $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ serisi $n=m-2$ dönüşümü ile $\sum_{m=3}^{\infty} a_{m-2}$ şeklinde yazılabilir. Her iki toplamda aynı açılımı verir.

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + \dots = \sum_{m=3}^{\infty} a_{m-2}$$

Kısmi Toplamlar Dizisi ve Bir Serinin Yakınsaklığı :

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ serisinin $\{S_n\}$ ile gösterilen kısmi toplamlar dizisi aşağıdaki gibi tanımlanır :

$$S_1 = a_1$$

$$S_2 = a_1 + a_2$$

$$S_3 = a_1 + a_2 + a_3$$

$\vdots$

$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n = \sum_{k=1}^n a_k$$

$\vdots$

$$\{S_n\} = \{S_1, S_2, \dots\}$$

$\{S_n\}$ dizisine $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ serisinin kısmi toplamlar dizisi,

$S_n = \sum_{k=1}^n a_k$ toplamına da serinin n. kısmi toplamı denir.

$S_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n = \sum_{k=1}^n a_k$ toplamı $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ serisinin n. kısmi toplamı

olmak üzere, eğer $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = S$ ise o zaman $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ serisi S toplamına yakınsıyor denir ve bu,

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n + \dots = S$$

ile ifade edilir. Eğer $\{S_n\}$ kısmi toplamlar dizisi ıraksak ise seri de ıraksaktır.

Özet: $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ serisi için, S_n n. kısmi toplam olmak üzere :

$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n \rightarrow = S$ ise seri S'ye yakınsar (yani toplamı S'dir.)
 $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n \rightarrow = \pm \infty$ ise seri $\pm \infty$ 'a ıraksar
 $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n$ Limit mevcut değil ise seri ıraksar

Geometrik Seri:

n. terimi $a_n = ar^{n-1}$ olan $\sum_{n=1}^{\infty} ar^{n-1} = a + ar + ar^2 + \dots$ şeklindeki

seriye geometrik seri denir. Burada a ve r , $a \neq 0$ ile verilen sabit sayılardır. Geometrik serinin ilk terimi a sayıdır. r sayısına serinin ortak oranı denir. Çünkü $n \geq 1$ için

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{a \cdot r^n}{a \cdot r^{n-1}} = r$$

olur.

Geometrik Serinin Yakınsaklığı:

$\sum_{n=1}^{\infty} ar^{n-1}$ geometrik serisinin n. kısmi toplamı S_n 'i hesaplayalım.

$$S_n = a + ar + ar^2 + \dots + ar^{n-1}$$
$$- r \cdot S_n = ar + ar^2 + ar^3 + \dots + ar^n$$

$$S_n - r \cdot S_n = a - ar^n = a(1 - r^n)$$

$$(1 - r) S_n = a(1 - r^n)$$

1. durum: $r=1$ ise, $\sum_{n=1}^{\infty} ar^{n-1} = \sum_{n=1}^{\infty} a = a + a + \dots + a + \dots$ serisi elde edilir. Bu durumda, $S_n = a + a + \dots + a = n \cdot a$ ve

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} n \cdot a \begin{cases} \nearrow +\infty & (a > 0) \\ \searrow -\infty & (a < 0) \end{cases} \text{ olur, böylece seri ıraksaktır.}$$

2. durum: $r \neq 1$ ise $(1 - r) S_n = a(1 - r^n) \Rightarrow S_n = \frac{a(1 - r^n)}{1 - r}$

a) $|r| < 1$ ise $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a(1 - r^n)}{1 - r} = \frac{a}{1 - r} \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \frac{a}{1 - r}$

Dolayısıyla seri yakınsaktır ve toplamı $\frac{a}{1 - r}$ dir.

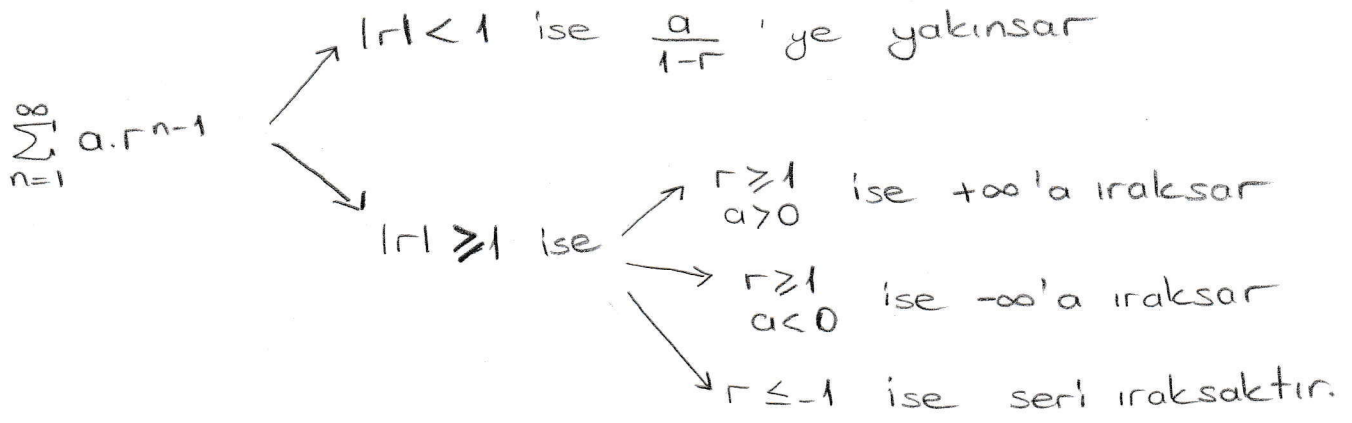
b) $r > 1$ ise $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a(1 - r^n)}{1 - r} \begin{cases} \nearrow +\infty & (a > 0) \\ \searrow -\infty & (a < 0) \end{cases}$

Dolayısıyla seri ıraksaktır.

c) $r \leq -1$ ise $\lim_{n \rightarrow \infty} r^n$ mevcut olmadığından $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a(1 - r^n)}{1 - r}$ limiti de

mevcut değildir. Dolayısıyla seri ıraksaktır.

Özet:



Örnek:

$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots$ toplamını bulunuz.

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \quad a=1, r=\frac{1}{2} \Rightarrow |r| = \frac{1}{2} < 1 \Rightarrow \text{seri yakınsak}$$

$$\text{Toplam} = S = \frac{a}{1-r} = \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = 2 \Rightarrow \text{seri } 2\text{'ye yakınsar.}$$

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \dots = 2 \text{ dir.}$$

Örnek:

$\pi - e + \frac{e^2}{\pi} - \frac{e^3}{\pi^2} + \dots$ toplamını bulunuz.

$$\pi - e + \frac{e^2}{\pi} - \frac{e^3}{\pi^2} + \dots = \pi \left(1 - \frac{e}{\pi} + \frac{e^2}{\pi^2} - \frac{e^3}{\pi^3} + \dots \right) = \sum_{n=1}^{\infty} \pi \cdot \left(-\frac{e}{\pi}\right)^{n-1}$$

$$a = \pi, r = -\frac{e}{\pi} \Rightarrow |r| = \left|\frac{e}{\pi}\right| < 1 \quad S = \frac{a}{1-r} = \frac{\pi}{1+\frac{e}{\pi}} = \frac{\pi^2}{\pi+e} //$$

Örnek:

$1 + 2^{1/2} + 2 + 2^{3/2} + \dots = ?$

$$1 + 2^{1/2} + 2 + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} (\sqrt{2})^{n-1} \quad a=1, r=\sqrt{2} > 1 \Rightarrow \text{seri } +\infty\text{'a ıraksar.}$$

Örnek:

$x = 0,323232\dots = 0,\overline{32}$ sayısını serileri kullanarak iki

tamsayının oranı olarak yazınız.

$$x = 0,3232\dots = \frac{32}{100} + \frac{32}{(100)^2} + \frac{32}{(100)^3} + \dots = \frac{32}{100} \left(1 + \frac{1}{100} + \frac{1}{(100)^2} + \dots \right)$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{32}{100} \left(\frac{1}{100}\right)^{n-1} \quad a = \frac{32}{100}, r = \frac{1}{100} < 1$$

$$x = \frac{a}{1-r} = \frac{\frac{32}{100}}{1-\frac{1}{100}} = \frac{32}{99} //$$

Teleskopik Seri :

Bir serinin kısmi toplamları, eğer onun terimlerini basit kesirlere ayırarak elde edilebiliyorsa böyle serilere teleskopik seri denir.

Harmonik Seri: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ serisine harmonik seri denir. Bu seri $+\infty$ 'a ıraksar.

Örnek! $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = ?$

$$S_n = \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \dots + \frac{1}{n(n+1)} \rightarrow \text{toplamı hesaplanamaz.}$$

Seri teleskopik seridir ve basit kesirlere ayrılır.

$$\begin{aligned} \frac{1}{n(n+1)} &= \frac{A}{n} + \frac{B}{n+1} \Rightarrow A=1, B=-1 \\ &= \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right] \end{aligned}$$

$$S_n = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \dots + \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} = 1 - \frac{1}{n+1}$$

$$S = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{n+1} \right) = 1 \quad \Rightarrow \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = 1 //$$

Örnek! $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{n^2+4n+3} = ?$

$$S_n = \frac{4}{2} + \frac{4}{15} + \frac{4}{6} + \dots + \frac{4}{n^2+4n+3}$$

$$\begin{aligned} \frac{4}{(n+1)(n+3)} &= \frac{A}{n+1} + \frac{B}{n+3} \Rightarrow A=2, B=-2 \\ &= \frac{2}{n+1} - \frac{2}{n+3} \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{n^2+4n+3} = \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{2}{n+1} - \frac{2}{n+3} \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} S_n &= \frac{2}{2} - \frac{2}{4} + \frac{2}{3} - \frac{2}{5} + \frac{2}{4} - \frac{2}{6} + \dots + \frac{2}{n} - \frac{2}{n+2} + \frac{2}{n+1} - \frac{2}{n+3} \\ &= 1 + \frac{2}{3} - \frac{2}{n+2} - \frac{2}{n+3} \end{aligned}$$

$$S = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{5}{3} - \frac{2}{n+2} - \frac{2}{n+3} \right) = \frac{5}{3} \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{n^2+4n+3} = \frac{5}{3} //$$

Örnek! $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n^2+3n+2} = ?$

$$S_n = \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \dots + \frac{1}{n^2+3n+2}$$

$$\frac{1}{n^2+3n+2} = \frac{1}{(n+1)(n+2)} = \frac{A}{n+1} + \frac{B}{n+2} \Rightarrow A=1, B=-1$$

$$= \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2}$$

$$S_n = 1 - \cancel{\frac{1}{2}} + \dots + \cancel{\frac{1}{n}} - \cancel{\frac{1}{n+1}} + \cancel{\frac{1}{n+1}} - \frac{1}{n+2} = 1 - \frac{1}{n+2}$$

$$S = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{n+2}\right) = 1 \quad // \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n^2+3n+2} = 1 \quad //$$

Örnek! $\sum_{n=2}^{\infty} \ln\left(1 - \frac{1}{n^2}\right) = ?$

$$S_n = \ln \frac{3}{4} + \ln \frac{8}{9} + \dots + \ln\left(1 - \frac{1}{n^2}\right)$$

$$\ln\left(1 - \frac{1}{n^2}\right) = \ln\left(\frac{n^2-1}{n^2}\right) = \ln\left(\frac{(n-1)}{n} \cdot \frac{(n+1)}{n}\right)$$

$$S_n = \ln\left(\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{2}\right) + \ln\left(\frac{2}{3} \cdot \frac{4}{3}\right) + \dots + \ln\left(\frac{n-1}{n} \cdot \frac{n+1}{n}\right)$$

$$= \ln\left[\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{3} \cdot \dots \cdot \frac{n-1}{n} \cdot \frac{n+1}{n}\right] = \ln\left(\frac{n+1}{2n}\right)$$

$$S = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \ln\left(\frac{n+1}{2n}\right) = \ln \frac{1}{2} \Rightarrow \sum_{n=2}^{\infty} \ln\left(1 - \frac{1}{n^2}\right) = \ln \frac{1}{2} \quad //$$

Serilerle ilgili Bazı Teoremler:

1) $\sum a_n = A, \sum b_n = B$ ise $\sum(a_n \mp b_n) = A \mp B, \sum k a_n = k \sum a_n$ (kısbt.)

2) $\sum a_n$ ıraksak ise $k \sum a_n$ serisi de ıraksaktır.

3) $\sum a_n$ ıraksak, $\sum b_n$ yakınsak ise $\sum(a_n \mp b_n)$ serisi de ıraksaktır.

4) $\sum a_n$ ıraksak, $\sum b_n$ ıraksak ise $\sum(a_n \mp b_n)$ serisi ıraksak veya yakınsak olabilir.

Örnek! $\sum a_n = 1+1+1+\dots$ $\left\{ \begin{array}{l} \sum(a_n+b_n) = 0+0+0+\dots = 0 \\ \sum b_n = -1-1-1-\dots \end{array} \right. \Rightarrow \text{Yakınsak}$

5) Bir seriye sonlu sayıda terim eklemek veya çıkarmak serinin karakterini değiştirmez.

* 6) $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ serisi yakınsak ise $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ dir.
(Tersi doğru değildir.)

* 7) n. terim testi:

$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \neq 0 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ serisi IRAKSAK tır.

Örnek! $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1}$ serisi, $\lim_{n \rightarrow \infty} (-1)^{n+1}$ limiti mevcut olmadığından, n. terim testine göre iraksaktır.

Örnek! $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2n-1}$ serisi yakınsak mıdır?

$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{2n-1} = \frac{1}{2} \neq 0$ olduğundan n. terim testine göre iraksaktır.

Örnek! $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^n - 2^n}{6^n} = ?$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^n - 2^n}{6^n} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\left(\frac{3}{6} \right)^n - \left(\frac{2}{6} \right)^n \right) = \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2} \right)^{n-1}}_{\substack{a=1 \\ r=\frac{1}{2} < 1}} - \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{3} \right)^{n-1}}_{\substack{a=1 \\ r=\frac{1}{3} < 1}} = 2 - \frac{3}{2} = \frac{1}{2} //$$
$$\frac{a}{1-r} = \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = 2 \quad \frac{a}{1-r} = \frac{1}{1-\frac{1}{3}} = \frac{3}{2}$$

Örnek! $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{4}{2^n} = ?$

$$\sum_{n=0}^{\infty} 4 \cdot \frac{1}{2^n} = 4 \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{n-1}} = 4 \cdot \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = 8 //$$
$$\substack{r=\frac{1}{2} < 1 \\ a=1}$$

Örnek! $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1+2^{n+1}}{3^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{3} \right)^n + \sum_{n=1}^{\infty} 2 \cdot \left(\frac{2}{3} \right)^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{1}{3} \right)^{n-1} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{3} \cdot \left(\frac{2}{3} \right)^{n-1}$

$$= \frac{\frac{1}{3}}{1-\frac{1}{3}} + \frac{\frac{4}{3}}{1-\frac{2}{3}} = \frac{1}{3} \cdot \frac{3}{2} + \frac{4}{3} \cdot \frac{3}{1} = \frac{9}{2} //$$

Pozitif Terimli Seriler için Yakınsaklık Testleri:

1) Integral Testi:

Integral testi; pozitif terimli bir serinin ona benzer şekilde davranan bir improper integralle karşılaştırmak suretiyle, yakınsak veya ıraksak olup olmadığını belirlememize yardımcı olur.

Teorem: f fonksiyonu, bir pozitif N tamsayısı için, $[N, \infty)$ aralığında pozitif, sürekli, azalan bir fonksiyon olmak üzere, $a_n = f(n)$ olsun. O zaman, $\sum_{n=N}^{\infty} a_n$ serisi ile $\int_N^{\infty} f(x) dx$ integrali aynı karakterlidir. Her ikisi de ıraksar veya her ikisi de yakınsar.

Not: Yukarıdaki teorem, verilen koşullar altında sadece seri ile integralin aynı karakterde olduğunu ifade eder, serinin toplamının integralin değerine eşit olduğunu söylenmez.

Örnek: Harmonik serinin ıraksak olduğunu gösteriniz.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}, \quad f(x) = \frac{1}{x} \text{ olsun. } f, [1, \infty) \text{ aralığında sürekli, pozitif ve azalandır. } (f'(x) = -\frac{1}{x^2} < 0)$$

Yani integral testi kullanılabilir.

$$\int_1^{\infty} \frac{dx}{x} = \lim_{R \rightarrow \infty} \int_1^R \frac{dx}{x} = \lim_{R \rightarrow \infty} (\ln R - \ln 1) = +\infty \Rightarrow \text{improper integral ıraksaktır.}$$

O halde integral testine göre $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ serisi de ıraksaktır.

Örnek: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+1}$ serisinin yakınsaklığını inceleyiniz.

$$f(x) = \frac{1}{x^2+1}, \quad [1, \infty) \text{ da pozitif, sürekli, azalandır. } (f'(x) = \frac{-2x}{(1+x^2)^2} < 0)$$

Integral testi kullanılabilir.

$$\int_1^{\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \lim_{R \rightarrow \infty} \int_1^R \frac{dx}{1+x^2} = \lim_{R \rightarrow \infty} (\arctan R - \arctan 1) = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4}$$

$\Rightarrow$ improper integral yakınsaktır. Dolayısıyla integral testine göre

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+1} \text{ serisi de yakınsaktır.}$$

p-Serisi :

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p} = 1 + \frac{1}{2^p} + \frac{1}{3^p} + \dots \text{ serisine } p\text{-serisi denir.}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p} \rightarrow p > 1 \Rightarrow \text{yakınsak}$$
$$\rightarrow p \leq 1 \Rightarrow \text{ıraksak}$$

$p > 1$ olsun.

$f(x) = \frac{1}{x^p}$, $[1, \infty)$ da pozitif, sürekli ve azalandır.

$$\int_1^{\infty} \frac{dx}{x^p} = \lim_{R \rightarrow \infty} \int_1^R \frac{dx}{x^p} = \lim_{R \rightarrow \infty} \left[\frac{x^{-p+1}}{-p+1} \Big|_1^R \right] = \frac{1}{1-p} \lim_{R \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{R^{p-1}} - 1 \right) = \frac{1}{p-1}$$

olduğundan integral testine göre seri yakınsaktır.

$p \leq 1$ olsun.

$$1-p > 0 \text{ olduğundan, } \int_1^{\infty} \frac{1}{x^p} dx = \lim_{R \rightarrow \infty} \int_1^R \frac{dx}{x^p} = \frac{1}{1-p} \lim_{R \rightarrow \infty} (R^{1-p} - 1) = \infty$$

olduğundan integral testine göre seri ıraksaktır.

2) Mukayese Testi :

$\sum a_n$ ve $\sum b_n$ terimleri negatif olmayan iki seri olsun.

a) Eğer her n için $a_n \leq b_n$ ve $\sum b_n$ yakınsak ise $\sum a_n$ yakınsak

b) Eğer her n için $b_n \leq a_n$ ve $\sum b_n$ ıraksak ise $\sum a_n$ ıraksaktır.

****** Mukayese testi için genel olarak seçilen seri ya geometrik seri, ya harmonik seri ya da p -serisidir.

Örnek: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n+1}{n^3+1}$ serisinin karakterini belirleyiniz.

$$\frac{3n+1}{n^3+1} = \frac{3n}{n^3+1} + \frac{1}{n^3+1} < \frac{3n}{n^3} + \frac{1}{n^3} < \frac{3}{n^2} + \frac{1}{n^2} = \frac{4}{n^2}$$

$$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n+1}{n^3+1} < \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{n^2} \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{n^2} \left(\begin{array}{l} p\text{-serisi} \\ p=2 > 1 \end{array} \right) \Rightarrow \text{Yakınsak}$$

Mukayese testine göre $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n+1}{n^3+1}$ yakınsaktır.

Örnek! $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5}{5n-1}$ serisinin karakterini belirleyiniz.

$$\frac{5}{5n-1} = \frac{1}{n-\frac{1}{5}} > \frac{1}{n} \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} < \sum_{n=1}^{\infty} \frac{5}{5n-1} \Rightarrow \text{Mukayese testine göre ıraksaktır.}$$

$\Downarrow$
harmonik seri ıraksaktır.

Örnek! $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\ln n}$ serisinin karakterini belirleyiniz.

$$\ln n < n \quad (n=1,2,3,\dots \text{ için}) \quad (n < e^n)$$

$$\frac{1}{\ln n} > \frac{1}{n} \Rightarrow \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n} < \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\ln n} \Rightarrow \text{Mukayese testine göre ıraksaktır.}$$

$\Downarrow$
harmonik seri ıraksaktır.

Örnek! $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{e^n \sqrt{n}}$ serisinin karakterini belirleyiniz.

$$\frac{1}{e^n \sqrt{n}} < \frac{1}{e^n} \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{e^n \sqrt{n}} < \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{e^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{e} \cdot \left(\frac{1}{e}\right)^{n-1}$$

geometrik seri.
 $a = \frac{1}{e}, r = \frac{1}{e} < 1$ yakınsaktır.

Dolayısıyla mukayese testine göre,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{e^n \sqrt{n}} \text{ serisi yakınsaktır.}$$

3) Limit Testi :

$\sum a_n$ ve $\sum b_n$ pozitif terimli iki seri ve $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = L$ olsun.

- a) $L \neq 0, \infty$ ise her iki seri aynı karakterlidir.
- b) $L=0$ ve $\sum b_n$ yakınsak ise $\sum a_n$ yakınsaktır.
- c) $L=\infty$ ve $\sum b_n$ ıraksak ise $\sum a_n$ ıraksaktır.

Örnek! $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1+\sqrt{n}}$ serisinin karakterini belirleyiniz.

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$ serisini seçelim. $p = \frac{1}{2} < 1$ seri ıraksak.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{1+\sqrt{n}}}{\frac{1}{\sqrt{n}}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n}}{1+\sqrt{n}} = 1 \neq 0, \infty \Rightarrow \text{iki seri aynı karakterdedir.}$$

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$ ıraksak olduğundan limit testine göre $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1+\sqrt{n}}$ ıraksaktır.

Örnek! $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{(n+1)^2}$ karakterini belirleyiniz.

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ serisini seğıelim. Harmonik seri ıraksaktır.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{2n+1}{(n+1)^2}}{\frac{1}{n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n^2+n}{(n+1)^2} = 2 \neq 0, \infty \Rightarrow \text{iki seri aynı karakterde}$$

Limit testine göre $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ ıraksak olduğundan $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{(n+1)^2}$ de ıraksaktır.

Örnek! $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt[3]{n^4-16}}{n^2 \sqrt{n+1}}$ serisinin karakterini belirleyiniz.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{\sqrt[3]{n^4-16} \rightarrow \frac{4}{3}}{n^2 \sqrt{n+1} \rightarrow \frac{5}{2}}}{\frac{1}{n^{7/6} \rightarrow \frac{5}{2} - \frac{4}{3} = \frac{7}{6}}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^{7/6} \sqrt[3]{n^4-16}}{n^2 \sqrt{n+1}} = 1 \neq 0, \infty \Rightarrow \text{iki seri aynı karakterde}$$

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{7/6}}$, $p = \frac{7}{6} > 1 \Rightarrow$ yakınsak olduğundan $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt[3]{n^4-16}}{n^2 \sqrt{n+1}}$ yakınsaktır.

Örnek! $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3+2n+3}{n^4+5n^2}$ karakterini belirleyiniz.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{n^3+2n+3 \rightarrow 3}{n^4+5n^2 \rightarrow 4}}{\frac{1}{n^{4-3=1}}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^4+2n^2+3n}{n^4+5n^2} = 1 \neq 0, \infty \Rightarrow \text{aynı karakterdeler}$$

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ harmonik seri ıraksak olduğundan $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3+2n+3}{n^4+5n^2}$ ıraksaktır.

Örnek! $\sum_{n=1}^{\infty} \sin^3\left(\frac{1}{n}\right)$ serisinin karakterini belirleyiniz.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sin^3\left(\frac{1}{n}\right)}{\left(\frac{1}{n}\right)^3} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{\sin \frac{1}{n}}{\frac{1}{n}} \right)^3 = 1 \neq 0, \infty \Rightarrow \text{aynı karakterdeler}$$

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3}$, $p=3 > 1$ olduğundan yakınsaktır.

Limit testinden dolayı $\sum_{n=1}^{\infty} \sin^3\left(\frac{1}{n}\right)$ serisi yakınsaktır.

4) Oran Testi!

$\sum a_n$ pozitif terimli bir seri ve $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = L$ olsun.

- a) $L < 1$ ise seri yakınsaktır.
- b) $L > 1$ ise seri ıraksaktır.
- c) $L = 1$ ise test sonuç vermez.

Örnek! $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{99^n}{n!}$ serisinin karakterini belirleyiniz.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{99^{n+1}}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{99^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{99}{n+1} = 0 < 1$$

Oran testine göre seri yakınsaktır.

Örnek! $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n}$ serisinin karakterini belirleyiniz.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^{n+1}}{n+1} \cdot \frac{n}{2^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} 2 \cdot \frac{n}{n+1} = 2 > 1$$

Oran testine göre seri ıraksaktır.

Örnek! $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{n!}$ serisinin karakterini belirleyiniz.

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)^{n+1}}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{n^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1) \cdot (n+1)^n}{(n+1) \cdot n!} \cdot \frac{n!}{n^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n+1}{n} \right)^n \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n} \right)^n = e > 1 \Rightarrow \text{Oran testine göre ıraksaktır.} \end{aligned}$$

Örnek! $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{3^n}$ serisinin karakterini belirleyiniz.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)^2}{3^{n+1}} \cdot \frac{3^n}{n^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{n+1}{n} \right)^2 = \frac{1}{3} < 1 \Rightarrow \text{Yakınsaktır.}$$

Örnek! $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)!}{(n!)^2}$ serisinin karakterini belirleyiniz.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(2n+2)!}{((n+1)!)^2} \cdot \frac{(n!)^2}{(2n)!} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(2n+2)(2n+1)(2n)!}{(n+1)^2 \cdot (n!)^2} \cdot \frac{(n!)^2}{(2n)!} = 4 > 1$$

Oran testine göre ıraksaktır.

Örnek! $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n + 5}{3^n}$ serisinin karakterini belirleyiniz.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^{n+1} + 5}{3^{n+1}} \cdot \frac{3^n}{2^n + 5} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{3} \cdot \frac{2^n \left(2 + \frac{5}{2^n}\right)}{2^n \left(1 + \frac{5}{2^n}\right)} = \frac{2}{3} < 1$$

Oran testine göre seri yakınsaktır.

Örnek! $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4^n \cdot n! \cdot n!}{(2n)!}$ serisinin karakterini belirleyiniz.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4^{n+1} (n+1)! (n+1)!}{(2n+2)!} \cdot \frac{(2n)!}{4^n \cdot n! \cdot n!} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4 \cdot (n+1)^2}{2(n+1)(2n+1)} = 1$$

Oran testi cevap vermez.

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{2(n+1)}{2n+1} > 1 \text{ olduğundan } a_{n+1} \text{ her zaman } a_n \text{ 'den büyüktür.}$$

Dolayısıyla serinin bütün terimleri $a_1 = 2$ den büyüktür. Yani dizinin n . terimi (genel terimi) $n \rightarrow \infty$ iken 0'a yakınsamaz. n . terim testinden seri iraksaktır.

5) Kök Testi:

$\sum a_n$ pozitif terimli bir seri ve $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = L$ olsun.

- a) $L < 1$ ise seri yakınsaktır.
- b) $L > 1$ ise seri iraksaktır.
- c) $L = 1$ ise test sonuç vermez.

Örnek! $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{2^n}$ serisinin karakterini belirleyiniz.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{n^2}{2^n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(\sqrt[n]{n})^2}{2} = \frac{1^2}{2} < 1 \Rightarrow \text{Kök testine göre seri yakınsak}$$

Örnek! $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{n+1}}{n^n}$ serisinin karakterini belirleyiniz.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{2^{n+1}}{n^n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^{\frac{n+1}{n}}}{n} = 0 < 1 \Rightarrow \text{Kök testine göre seri yakınsak}$$

Örnek! $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(\ln n)^n}$ serisinin karakterini belirleyiniz.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{1}{(\ln n)^n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\ln n} = 0 < 1 \Rightarrow \text{Kök testine göre seri yakınsak}$$

Örnek! $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n^3}$ serisinin karakterini belirleyiniz.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{2^n}{n^3}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2}{(\sqrt[n]{n})^3} = \frac{2}{1^3} = \frac{2}{1} > 1 \Rightarrow \text{Kök testine göre seri ıraksak}$$

Örnek! $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{n+5}}{3^n}$ serisinin karakterini belirleyiniz.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{2^{n+5}}{3^n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2}{3} \cdot \left(1 + \frac{5}{2^n}\right)^{\frac{1}{n}} = \frac{2}{3} < 1 \Rightarrow \text{seri yakınsak}$$

6) n. terim Testi :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \neq 0 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ serisi ıraksaktır.}$$

Örnek! $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2+1}{n^2+5}$ serisinin karakterini belirleyiniz.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2+1}{n^2+5} = 1 \neq 0 \Rightarrow n. \text{ terim testinden seri ıraksaktır.}$$

Örnek! $\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n$ serisinin karakterini belirleyiniz.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\left(1 - \frac{1}{n}\right)^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right) = 1 \Rightarrow \text{Test sonuç vermez.}$$

n. terim testi kullanılırsa,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n = e^{-1} = \frac{1}{e} \neq 0 \Rightarrow \text{seri ıraksaktır.}$$

~ ALTERNE SERİLER ~

Bir serinin terimleri sırasıyla bir pozitif bir negatif değerler alıyorsa böyle serilere alterne seri denir. Genel olarak, bir alterne seri $\forall n \in \mathbb{Z}^+$ için $a_n > 0$ olmak üzere

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n = a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + \dots$$

şeklindedir.

Alterne Seri Testi:

$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \cdot a_n$ serisi için,

1) $a_n > 0$ ($\forall n=1,2,3,\dots$)

2) $a_{n+1} < a_n$ ($\forall n=1,2,\dots$)

3) $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$

şartları sağlanıyorsa alterne seri yakınsaktır.

Örnek! $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{n^2+1}$ serisinin yakınsaklığını inceleyiniz.

i) $a_n = \frac{1}{n^2+1} > 0$ ($\forall n=1,2,\dots$)

ii) $a_{n+1} = \frac{1}{(n+1)^2+1} < \frac{1}{n^2+1} = a_n$

iii) $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^2+1} = 0$

} şartları sağlandığından
Alterne Seri Testine göre seri yakınsaktır.

Mutlak Yakınsaklık: Eğer $\sum_{n=1}^{\infty} |(-1)^n a_n|$ serisi yakınsak ise $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n$ serisine

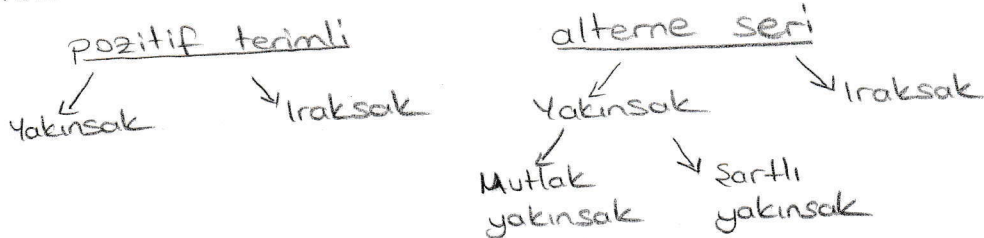
mutlak yakınsaktır denir.

* Mutlak yakınsak bir seri yakınsaktır, ancak tersi doğru değildir.

Şartlı Yakınsaklık: Eğer $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n$ yakınsak ancak mutlak yakınsak değilse o zaman $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n$ serisi şartlı yakınsaktır denir.

* Şartlı yakınsaklık için alterne seri testi kullanılır.

* Pozitif terimli serilerdeki testler mutlak yakınsaklığı test etmek için kullanılır. Bu testler $\sum |a_n|$ serisine uygulanmalıdır.



Alterne Harmonik Seri :

$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n}$ serisine alterne harmonik seri denir.

* $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n}$ alterne harmonik serisinin yakınsaklığını inceleyip türünü belirtiniz.

1) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ serisi harmonik seridir ve ıraksaktır. O halde $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n}$

mutlak yakınsak değildir.

2) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n}$ şartlı yakınsak mı?

i) $a_n = \frac{1}{n} > 0$ ($\forall n=1,2,\dots$)

ii) $a_{n+1} = \frac{1}{n+1} < \frac{1}{n} = a_n$

iii) $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$

} şartları sağlandığından alterne seri testine göre seri yakınsaktır.

Seri mutlak yakınsak olmadığından şartlı yakınsaktır.

** Alterne harmonik seri şartlı yakınsaktır.

Örnek! $\sum_{n=1}^{\infty} n \cdot \frac{\cos n\pi}{2^n}$ serisinin yakınsaklığını inceleyiniz.

$$\sum_{n=1}^{\infty} n \cdot \frac{\cos n\pi}{2^n} = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n}{2^n}$$

Mutlak yakınsak mı? $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n}$ yakınsak mı?

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{2^{n+1}} \cdot \frac{2^n}{n} = \frac{1}{2} < 1 \Rightarrow \text{Yakınsak}$$

O halde $\sum_{n=1}^{\infty} n \cdot \frac{\cos n\pi}{2^n}$ serisi mutlak yakınsaktır.

Örnek! $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2 \ln n}$ serisinin yakınsaklık türünü belirleyiniz.

Mutlak yakınsak mı? $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 \ln n}$ yakınsak mı?

Limit testini kullanalım. $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ ($p=2>1$ yakınsak) serisini seçelim.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{n^2 \ln n}}{\frac{1}{n^2}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2}{n^2 \ln n} = 0 \Rightarrow \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^2} \text{ yakınsak olduğundan}$$

limit testine göre $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^2 \ln n}$ de yakınsak

O halde $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2 \ln n}$ mutlak yakınsaktır.

** Mutlak olmayan yakınsaklığı göstermek için Alterne Seri Testi kullanılır.

Örnek: $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\cos n\pi}{\ln n}$ serisinin yakınsaklığını inceleyiniz, yakınsak ise türünü belirleyiniz.

$$i) \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\cos n\pi}{\ln n} = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\ln n}$$

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\ln n} \text{ mutlak yakınsak mı?} \Rightarrow \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\ln n} \text{ yakınsak mı?}$$

Mukayese testini kullanalım.

$$\ln n < n \Rightarrow \frac{1}{\ln n} > \frac{1}{n} \Rightarrow \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\ln n} > \underbrace{\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n}}$$

↓
Harmonik seri ıraksak

Mukayese testine göre $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n}$ ıraksak olduğundan

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\ln n} \text{ serisi de ıraksaktır.}$$

0 halde $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\ln n}$ mutlak yakınsak değildir.

$$ii) \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\ln n} \text{ şartlı yakınsak mı?}$$

$$a) a_n = \frac{1}{\ln n} > 0$$

$$b) \frac{1}{\ln(n+1)} < \frac{1}{\ln n} \Rightarrow a_{n+1} < a_n$$

$$c) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\ln n} = 0$$

Alterne seri testine göre seri yakınsaktır. Ancak mutlak yakınsak olmadığından şartlı yakınsaktır.

Serilerin Yeniden Düzenlenmesi:

1) Eğer bir seri mutlak yakınsak ise ; serinin pozitif terimleri ile oluşturulan alt seri ile negatif terimlerden oluşturulan alt serinin ikisi de yakınsaktır.

$$\begin{array}{ccccccc} + & - & + & - & + & - & \dots \rightarrow \text{mutlak yakınsak} \\ \swarrow & & \searrow & & & & \\ +++\dots & & -\dots & & & & \\ \text{yakınsak} & & \text{yakınsak} & & & & \end{array}$$

2) Eğer bir seri şartlı yakınsak ise ; negatif terimli alt seri $-\infty$ 'a , pozitif terimli alt seri $+\infty$ 'a ıraksar.

$$\begin{array}{ccccccc} + & - & + & - & + & - & \dots \rightarrow \text{şartlı yakınsak} \rightarrow \infty - \infty \\ \swarrow & & \searrow & & & & \\ +++\dots & & -\dots & & & & \\ +\infty & & -\infty & & & & \end{array}$$

3) Eğer bir seri mutlak yakınsak ise serinin terimlerini farklı bir sıralama ile yeniden düzenlersek yeni seri orijinal serinin toplamına yakınsar.

* Eğer bir seri şartlı yakınsak ise ve $L \in \mathbb{R}$ ise o zaman serinin terimleri $+\infty/-\infty$ 'a ıraksayacak veya L sayısına yakınsayacak şekilde yeniden düzenlenebilir.

~ KUVVET SERİLERİ ~

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-c)^n = a_0 + a_1 (x-c) + a_2 (x-c)^2 + \dots \text{ şeklindeki seriye}$$

" $x=c$ kuvvetlerinin kuvvet serisi" veya " $x=c$ civarında bir kuvvet serisi" denir.

* $a_0, a_1, a_2, \dots$ sabitleri kuvvet serisinin katsayılarıdır.

** Kuvvet serisinin terimleri bir x değişkeninin fonksiyonu olduğundan, seri x in her bir değeri için yakınsayabilir veya ıraksayabilir. Serinin yakınsak olduğu değerler için toplam x 'e bağlı bir fonksiyon tanımlar.

* c noktası $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-c)^n$ kuvvet serisinin yakınsaklık merkezidir. Seri $x=c$ de a_0 'a yakınsar

Teorem: $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-c)^n$ kuvvet serisi için aşağıdakilerden biri sağlanır:

- a) Seri sadece $x=c$ de yakınsaktır.
- b) Seri her $x \in \mathbb{R}$ için yakınsaktır.
- c) Seri, $|x-c| < R$ eşitsizliğini sağlayan her x 'de yakınsak, $|x-c| > R$ yi sağlayan her x 'de ıraksayacak şekilde bir R reel sayısı olabilir. Bu durumda seri $x=c+R$ ve $x=c-R$ uç noktalarında yakınsayabilir veya ıraksayabilir.

* Kuvvet serisinin yakınsak olduğu aralığa (noktaya) yakınsaklık aralığı denir.

(c) deki R sayısına yakınsaklık yarıçapı denir.

(a) durumunda yakınsaklık yarıçapının $R=0$ olduğunu söyleriz.

(b) de $R=\infty$ olur.

* Yakınsaklık yarıçapı R , yakınsaklık merkezi c olan kuvvet serisinin yakınsaklık aralığı :

$[c-R, c+R]$, $[c-R, c+R)$, $(c-R, c+R]$, $(c-R, c+R)$ aralıklarından biri olabilir.

Bir Kuvvet Serisinin Yakınsaklığını Test Etmek

1) Oran Testi kullanılarak serinin mutlak yakınsadığı bir aralık bulunur.

$$|x-c| < R \Rightarrow c-R < x < c+R$$

2) Mutlak yakınsaklık aralığı sonlu ise uç noktalarda yakınsaklık / ıraksaklık incelemesi yapılır.

3) Yakınsaklık aralığı dışında kalan noktalarda seri ıraksaktır.

Örnek! $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ hangi x değerleri için yakınsar?

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|x^{n+1}|}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{|x^n|} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|x|}{n+1} = 0 < 1$$

Seri her $x \in \mathbb{R}$ için mutlak yakınsar.

Örnek! $\sum_{n=0}^{\infty} n! x^n$ hangi x değerleri için yakınsar?

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|x^{n+1}| \cdot (n+1)!}{n! \cdot |x^n|} = \lim_{n \rightarrow \infty} |x| \cdot (n+1) = \infty \quad (x \neq 0 \text{ için})$$

Seri sadece merkezinde yani $x=0$ da yakınsar.

Örnek! $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$ serisinin mutlak yakınsak, şartlı yakınsak, ıraksak olduğu x değerlerini bulunuz.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|x^{n+1}|}{(n+1)!} \cdot \frac{n}{|x^n|} = \lim_{n \rightarrow \infty} |x| \cdot \frac{n}{\underbrace{n+1}_1} = |x| < 1$$

$|x| < 1$ için seri mutlak yakınsaktır. $-1 < x < 1 \rightarrow$ Mutlak Y.

$x = -1$ için, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} \rightarrow$ Alterne harmonik seri
Sırtlı yakınsaktır.

$x=1$ için, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \rightarrow$ Harmonik seri
ıraksaktır.

$x \in (-1, 1) \rightarrow$ seri mutlak yakınsak
 $x = -1$ de $\rightarrow$ şartlı yakınsak

Yakınsaklık Aralığı $[-1, 1)$

$\mathbb{R} - [-1, 1) \rightarrow$ seri iraksak

10/10/11

Örnek: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{\sqrt{n^2+3}}$ serisinin mutlak / şartlı yakınsak ve ıraksak olduğu x değerlerini araştırın ve yakınsaklık aralığını bulun.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{x^{n+1}}{\sqrt{(n+1)^2+3}} \cdot \frac{\sqrt{n^2+3}}{x^n} \right| = |x| < 1 \Rightarrow \boxed{-1 < x < 1}$$

Mutlak yakınsak

$x=1$ için, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n^2+3}}$ serisi elde edilir.

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ harmonik serisini (ıraksak) seçelim.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{\sqrt{n^2+3}}}{\frac{1}{n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{\sqrt{n^2+3}} = 1 \neq 0, \infty \Rightarrow \text{Limit testine göre}$$

iki seri aynı karakterde

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ ıraksak olduğundan $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n^2+3}}$ serisi de ıraksaktır.

$x=-1$ için, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n^2+3}}$ elde edilir. Mutlak yakınsak değildir.

Şartlı yakınsak mı?

i) $a_n = \frac{1}{\sqrt{n^2+3}} > 0$

ii) $a_{n+1} = \frac{1}{\sqrt{(n+1)^2+3}} < a_n = \frac{1}{\sqrt{n^2+3}}$

iii) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{n^2+3}} = 0$

Alterne seri testine göre yakınsaktır

$x \in (-1, 1) \rightarrow$ Mutlak yakınsak
 $x = -1 \rightarrow$ Şartlı yakınsak

$[-1, 1)$ Yakınsaklık Aralığı

$\mathbb{R} - [-1, 1) \rightarrow$ ıraksak

Örnek! $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2x+5)^n}{(n^2+1)3^n}$ yakınsaklık aralığını inceleyiniz.

$$\begin{aligned}\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{(2x+5)^{n+1}}{[(n+1)^2+1] \cdot 3^{n+1}} \cdot \frac{(n^2+1) \cdot 3^n}{(2x+5)^n} \right| \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \underbrace{\frac{(n^2+1)}{(n+1)^2+1}}_1 \cdot \frac{|2x+5|}{3} = \frac{|2x+5|}{3} < 1\end{aligned}$$

$$|2x+5| < 3 \Rightarrow -3 < 2x+5 < 3 \Rightarrow \boxed{-4 < x < -1} \Rightarrow \text{Mutlak yakınsak}$$

$x = -1$ için, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+1}$ elde edilir.

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ ($p=2>1$ yakınsak) serisini seçelim.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{n^2+1}}{\frac{1}{n^2}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2}{n^2+1} = 1 \neq 0, \infty \Rightarrow \text{Limit testine göre aynı karakterdedir.}$$

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ yakınsak olduğundan $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+1}$ yakınsaktır. $\Rightarrow$ Mutlak yakınsak

$x = -4$ için, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2+1}$ elde edilir.

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+1}$ yakınsak olduğundan $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2+1}$ mutlak yakınsaktır.

$[-4, -1] \rightarrow$ Mutlak yakınsak

$\rightarrow$ sırtlı yakınsak

$\mathbb{R} - [-4, -1] \rightarrow$ ıraksak

Kuvvet Serilerinde İşlemler:

1) Toplama / Çıkarma: Yakınsama aralıklarının kesişiminde iki kuvvet serisi tıpkı sabit terimli serilerdeki gibi terim terim eklenip çıkarılabilir.

$$A(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-c)^n, |x-c| < R$$

$$B(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n(x-c)^n, |x-c| < R$$

$$A(x) \pm B(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (a_n \pm b_n)(x-c)^n, |x-c| < R$$

2) Çarpma: Eğer $A(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ ve $B(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n, |x| < R$ aralığında mutlak yakınsak iki seri ise ve

$$c_n = a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + \dots + a_n b_0 = \sum_{k=0}^n a_k b_{n-k}$$

olarak verilirse, o zaman $\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ serisi $|x| < R$ aralığında $A(x) \cdot B(x)$ e yakınsar.

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n = A(x) \cdot B(x) = \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \right) \cdot \left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n \right), |x| < R$$

c_n katsayısını bulmak çok zor olabilir ve bazen genel bir formül de bulunamayabilir. Bu gibi durumlarda çarpım serisinin ilk birkaç terimi bulunarak işlem yapılır.

Örnek: $\left(\sum_{n=0}^{\infty} x^n \right) \left(\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1} \right) = ?$

$$(1+x+x^2+\dots) \cdot \left(x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \dots \right) = x + \left(-\frac{x^2}{2} + x^2 \right) + \left(\frac{x^3}{3} - \frac{x^3}{2} + x^3 \right) + \dots$$

$$= x + \frac{x^2}{2} + \frac{5x^3}{6} + \dots$$

3) Sabitlerle Çarpma: $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-c)^n = f(x)$ ($|x-c| < R$) serisini

bir α sabiti ile çarparsak,

$$\sum_{n=0}^{\infty} \alpha a_n(x-c)^n = \alpha f(x)$$

Serisi de $|x-c| < R$ aralığında yakınsaktır. Dolayısıyla bir seriyi sabit bir sayıyla çarpmak yakınsaklık aralığını değiştirmez. (Sabit n 'ye bağlı değildir, x cinsinden sabitlerle çarpılabilir.)

* Bir kuvvet serisi yakınsadığı aralıkta bir $f(x)$ fonksiyonu

tanımlar.

Not: $\sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1+x+x^2+\dots = \frac{1}{1-x}$ ($-1 < x < 1$) dir.

İspat: $\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \sum_{n=1}^{\infty} x^{n-1} \rightarrow$ geometrik seri, $a=1$, $r=x$

Bu seri $|r|=|x| < 1$ için $\frac{a}{1-r} = \frac{1}{1-x}$ e yakınsar. Dolayısıyla,

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x} \quad (-1 < x < 1) \text{ dir.}$$

4) Dönüşüm: Eğer, $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ serisi $|x| < R$ için mutlak yakınsak ise, o zaman her sürekli $f(x)$ fonksiyonu için $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (f(x))^n$ de $|f(x)| < R$ için yakınsar.

Örnek: $\sum_{n=0}^{\infty} 4^n x^{2n}$ serisinin yakınsaklık aralığını ve bu aralıkta yakınsadığı fonksiyonu bulun.

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x} \quad (|x| < 1) \text{ olduğunu biliyoruz.}$$

$$x \rightarrow 4x^2 \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} (4x^2)^n = \frac{1}{1-4x^2} \quad |4x^2| < 1 \Rightarrow -\frac{1}{2} < x < \frac{1}{2}$$

↓
sürekli
old. den
dönüşüm
yapılabilir.

$$\sum_{n=0}^{\infty} 4^n x^{2n} = \frac{1}{1-4x^2}$$

yakınsadığı
fonk.

$(|x| < \frac{1}{2})$ bulunun
yakınsaklık
aralığı

5) Türev: Eğer $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-c)^n$ serisi $R > 0$ yakınsaklık yarıçapına sahipse, $c-R < x < c+R$ aralığında $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-c)^n$ fonksiyonunu tanımlar. Bu durumda,

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n \cdot a_n (x-c)^{n-1}$$

$$f''(x) = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n (x-c)^{n-2}$$

dir. Bu türev serilerinden her biri $c-R < x < c+R$ de yakınsar.

6) Terim Terime İntegrasyon:

$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-c)^n$ serisinin $c-R < x < c+R$ için yakınsak olduğunu varsayalım. Bu durumda

$$\int f(x) dx = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot \frac{(x-c)^{n+1}}{n+1} + k$$

serisi $c-R < x < c+R$ için yakınsaktır.

Örnek 1 Aşağıdaki fonksiyonların kuvvet serisi temsillerini ve geçerli oldukları aralıkları bulunuz.

a) $\frac{1}{(1-x)^2}$

b) $\frac{1}{(1-x)^3}$

c) $\ln(1+x)$

a) $\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1+x+x^2+\dots (*)$ $(-1 < x < 1)$ olduğunu biliyoruz.

(*)'den türev alırsak,

$$\frac{1}{(1-x)^2} = \sum_{n=1}^{\infty} n x^{n-1} \quad (-1 < x < 1)$$

b) (*)'den üzerinden iki kez türev alırsak,

$$\frac{2}{(1-x)^3} = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) x^{n-2} \quad (-1 < x < 1)$$

$$\frac{1}{(1-x)^3} = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{n(n-1)}{2} x^{n-2} \quad (-1 < x < 1)$$

c) (*)'da $x = -t$ dönüşümü yapalım.

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n t^n = \frac{1}{1+t} = 1 - t + t^2 - t^3 + \dots \quad (-1 < t < 1)$$

İntegral alırsak,

$$\ln(1+t) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{t^{n+1}}{n+1} + c \quad (-1 < t < 1)$$

$$t=0 \Rightarrow c=0 \Rightarrow \ln(1+t) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{t^{n+1}}{n+1} \quad (-1 < t < 1)$$

Örnek! $f(x) = \frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} x^n \quad (-1 < x < 1)$ için

$f'(x)$, $f''(x)$ türev serilerini bulunuz.

$$f'(x) = \frac{1}{(1-x)^2} = \sum_{n=1}^{\infty} n \cdot x^{n-1} \quad (-1 < x < 1)$$

$$f''(x) = \frac{2}{(1-x)^3} = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) x^{n-2} \quad (-1 < x < 1)$$

Örnek! $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \dots \quad (-1 < x < 1)$

ise $f(x) = ?$

$$f'(x) = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + \dots \quad (-1 < x < 1)$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} (-x^2)^n$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x} \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} (-x^2)^n = \frac{1}{1+x^2} = f'(x) \quad (-1 < x < 1)$$

$f'(x) = \frac{1}{1+x^2}$ her iki tarafın integralini alalım.

$$\int f'(x) dx = \int \frac{1}{1+x^2} dx$$

$$f(x) = \arctan x + C$$

$$x=0 \Rightarrow f(0) = 0 \Rightarrow C=0$$

$$\Rightarrow f(x) = \arctan x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} \quad (-1 < x < 1)$$

Örnek: $\sum_{n=1}^{\infty} n \cdot x^{n-1} = \frac{1}{(1-x)^2}$ $(-1 < x < 1)$ serisini kullanarak

$\sum_{n=1}^{\infty} n^2 x^n$ serisinin toplamını bulunuz. Bu sonucu kullanarak

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{2^n}$ serisinin yakınsadığı değeri bulunuz.

$$\sum_{n=1}^{\infty} n \cdot x^{n-1} = \frac{1}{(1-x)^2} \quad (-1 < x < 1) \rightarrow x \text{ ile çarpalım,}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} n \cdot x^n = \frac{x}{(1-x)^2} \quad (-1 < x < 1) \rightarrow \text{türev alalım,}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^2 \cdot x^{n-1} = \frac{1+x}{(1-x)^3} \quad (-1 < x < 1) \rightarrow x \text{ ile çarpalım,}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^2 x^n = \frac{x(1+x)}{(1-x)^3} \quad (-1 < x < 1)$$

$$x = \frac{1}{2} \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{2^n} = \frac{\frac{1}{2}(1+\frac{1}{2})}{(1-\frac{1}{2})^3} = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{2} \cdot 8 = 6 //$$

Örnek: $f(x) = \frac{1}{2+x}$ için $(x-1)$ in kuvvetlerine göre olan bir seri temsilini ve yakınsaklık aralığını bulunuz.

$t = x-1 \Rightarrow x = t+1$ dönüşümü yapalım.

$$\frac{1}{2+x} = \frac{1}{3+t} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{1+\frac{t}{3}} = \frac{1}{3} \left(1 - \frac{t}{3} + \frac{t^2}{9} - \frac{t^3}{27} + \dots \right) \quad (-1 < \frac{t}{3} < 1)$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{t^n}{3^{n+1}} \quad (-3 < t < 3)$$

$$= \boxed{\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(x-1)^n}{3^{n+1}}}$$

$$-3 < x-1 < 3 \Rightarrow \boxed{-2 < x < 4}$$

Örnek! $f(x) = \frac{x}{1+x^2}$ fonksiyonu için bir kuvvet serisi temsili

ve yakınsaklık aralığını bulun.

$$\sum a_n (x-c)^n = f(x), |x-c| < R$$

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n, |x| < R$$

↓ $x \rightarrow -x^2$ yazalım

$$\frac{1}{1+x^2} = \sum_{n=0}^{\infty} (-x^2)^n = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n}, |-x^2| < 1 \Rightarrow |x| < 1$$

↓ x ile çarpalım

$$\frac{x}{1+x^2} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n+1}, |x| < 1$$

Örnek! $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{2^k} = ?$

$$\sum_{k=1}^{\infty} k \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^k \Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} k x^k = \text{toplam bulmalıyım } (x = \frac{1}{2} \text{ yazacağız})$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} x^k = \frac{1}{1-x} \rightarrow \text{türev alalım } (|x| < 1)$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} k \cdot x^{k-1} = \frac{1}{(1-x)^2} (|x| < 1) \rightarrow x \text{ ile çarpalım.}$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} k \cdot x^k = \frac{x}{(1-x)^2} (|x| < 1)$$

$$x = \frac{1}{2} \Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} k \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^k = \frac{\frac{1}{2}}{\left(1-\frac{1}{2}\right)^2} = \frac{1}{2} \cdot 4 = 2 //$$

Örnek!

$$\sum_{n=0}^{\infty} (n+2)x^n$$

serisinin yakınsadığı fonksiyonu ve

bu yakınsamanın gerçekleştiği aralığı bulunuz. Bu toplam
yardımıyla $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+2)}{3^n}$ serisinin toplamını bulunuz.

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}, \quad |x| < 1$$

↓ x^2 ile çarpalım

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^{n+2} = \frac{x^2}{1-x}, \quad |x| < 1$$

↓ türev alalım

$$\sum_{n=0}^{\infty} (n+2)x^{n+1} = \frac{2x(1-x) + x^2}{(1-x)^2} = \frac{2x-x^2}{(1-x)^2}, \quad |x| < 1$$

↓ $\frac{1}{x}$ ile çarpalım

$$\sum_{n=0}^{\infty} (n+2)x^n = \frac{2-x}{(1-x)^2}, \quad |x| < 1$$

Toplam Yak. aralığı

$$x = \frac{1}{3} \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n+2}{3^n} = \frac{2 - \frac{1}{3}}{\left(1 - \frac{1}{3}\right)^2} = \frac{5}{3} \cdot \frac{9}{4} = \frac{15}{4} //$$

$\left(\frac{1}{3} < 1\right)$

Taylor ve Maclaurin Serileri

Yakınsaklık aralığının içindeki bir kuvvet serisi toplamının, her mertebeden türevi olan sürekli bir fonksiyon olduğunu biliyoruz. Acaba bunun tersi doğru mudur?

Eğer bir $f(x)$ fonksiyonunun bir I aralığında her mertebeden türevi varsa bu fonksiyon bir kuvvet serisi ile temsil edilebilir mi? Eğer edilebilirse bu kuvvet serisinin katsayıları için ne söylenebilir?

Son soruyu, eğer $f(x)$ fonksiyonu pozitif yakınsaklık yarıçapına sahip

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-a)^n = a_0 + a_1(x-a) + a_2(x-a)^2 + \dots + a_n(x-a)^n + \dots$$

kuvvet serisi olarak ifade edilirse cevaplayabiliriz. I yakınsaklık aralığı içindeki terimleri tek tek türevlersek,

$$f'(x) = a_1 + 2a_2(x-a) + 3a_3(x-a)^2 + \dots + n a_n(x-a)^{n-1} + \dots$$

$$f''(x) = 2a_2 + 2 \cdot 3 a_3(x-a) + 3 \cdot 4 a_4(x-a)^2 + \dots$$

$$f'''(x) = 1 \cdot 2 \cdot 3 a_3 + 2 \cdot 3 \cdot 4 a_4(x-a) + 3 \cdot 4 \cdot 5 a_5(x-a)^2 + \dots$$

$\vdots$

Tüm n ler için genel olarak :

$$f^{(n)}(x) = n! a_n + (x-a) \text{ ortak çarpanını içeren bazı terimler}$$

Bu denklemler $x=a$ da geçerli olduklarından,

$$f'(a) = a_1, \quad f''(a) = 2! a_2, \quad f'''(a) = 3! a_3, \dots, \quad f^{(n)}(a) = n! a_n$$

elde edilir. Eğer böyle bir seri varsa bir tanedir ve n . kat-sayısı $a_n = \frac{f^{(n)}(a)}{n!}$ şeklindedir.

Dolayısıyla f in bir seri açılımı varsa şöyle olmalıdır:

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + \dots \quad (*)$$

Şimdi eğer $x=a$ merkezli bir I aralığında her mertebeden türevi olan herhangi bir f fonksiyonu ile başlarsak ve bu fonksiyonu $(*)$ serisini üretmek için kullanırsak, bu seri I daki her x için $f(x)$ 'e yakınsar mı?

Cevap "belki" dir, bazı fonksiyonlar için doğru bazıları için yanlıştır.

Taylor Serisi: f fonksiyonu bir a noktasını içeren bir aralıkta her mertebeden türeulenebilir bir fonksiyon olsun. Bu durumda f tarafından $x=a$ noktasında üretilen Taylor Serisi aşağıdaki gibi tanımlanır:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!} (x-a)^n = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \dots$$

Maclaurin Serisi: f tarafından üretilen Maclaurin serisi,

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!} x^2 + \dots$$

olarak tanımlanır. Yani Maclaurin serisi $x=0$ daki Taylor Serisidir.

Taylor Polinomları: f fonksiyonu bir a noktasını içeren bir aralıkta n . mertebeden türeue sahip bir fonksiyon olsun. Bu durumda f tarafından $x=a$ da üretilen n . mertebe Taylor polinomu $P_n(x)$ ile gösterilir ve şu şekilde tanımlanır:

$$P_n(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$$

$P_n(x)$, $x=a$ civarında $f(x)$ in en iyi polinom yaklaşımını verir.

Örnek: $f(x) = e^x$ tarafından üretilen $x=0$ daki Taylor Serisini ve Taylor Polinomunu bulunuz.

$$f(x) = e^x \rightarrow f(0) = 1$$

$$f'(x) = e^x \rightarrow f'(0) = 1$$

$$\vdots$$
$$f^{(n)}(x) = e^x \rightarrow f^{(n)}(0) = 1$$

$$\text{Taylor Serisi} \rightarrow f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \dots$$
$$= 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \dots$$

$$\text{Taylor Polinomu} \rightarrow P_n(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!}$$

Örnek: $f(x) = \cos x$ in $x=0$ daki Taylor Serisi ve Polinomunu bulunuz.

$$f(x) = \cos x \rightarrow f(0) = 1$$

$$f'(x) = -\sin x \rightarrow f'(0) = 0$$

$$f''(x) = -\cos x \rightarrow f''(0) = -1$$

$$f'''(x) = \sin x \rightarrow f'''(0) = 0$$

$$f^{(iv)}(x) = \cos x \rightarrow f^{(iv)}(0) = 1$$

$\vdots$

$$f^{(2n)}(x) = (-1)^n \cos x \rightarrow f^{(2n)}(0) = (-1)^n$$

$$f^{(2n+1)}(x) = (-1)^{n+1} \sin x \rightarrow f^{(2n+1)}(0) = 0$$

$$\text{Taylor Serisi} \Rightarrow f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \dots = 1 + 0 \cdot x - \frac{x^2}{2!} + 0 \cdot x^3 + \frac{x^4}{4!} + \dots + \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!} + \dots$$
$$= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}$$

$$\text{Taylor Polinomu} \rightarrow P_{2n}(x) = P_{2n+1}(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \dots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}$$

$$\left[f^{(2n+1)}(0) = 0 \text{ olduğundan } P_{2n}(x) = P_{2n+1}(x) \right]$$

Örnek: $f(x) = \frac{1}{x}$ tarafından $a=2$ de üretilen Taylor Serisini bulunuz. Hangi noktalarda seri $\frac{1}{x}$ 'e yakınsar?

$$f(x) = x^{-1} \rightarrow f'(x) = -x^{-2} \rightarrow f''(x) = 2! x^{-3}, \dots, f^{(n)}(x) = n! x^{-(n+1)}$$

$$f(2) = \frac{1}{2} \rightarrow f'(2) = -\frac{1}{2^2} \rightarrow f''(2) = \frac{2!}{2^3}, \dots, f^{(n)}(2) = (-1)^n \frac{n!}{2^{n+1}}$$

$$\text{Taylor Serisi} \rightarrow f(2) + f'(2)(x-2) + \frac{f''(2)}{2!}(x-2)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(2)}{n!}(x-2)^n + \dots$$

$$= \frac{1}{2} - \frac{(x-2)}{2^2} + \frac{(x-2)^2}{2^3} + \dots + (-1)^n \frac{(x-2)^n}{2^{n+1}} + \dots$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2} \cdot \left(-\frac{(x-2)}{2}\right)^{n-1} \rightarrow \text{geometrik seri}$$

$$a = \frac{1}{2} \quad r = -\frac{(x-2)}{2}$$

Bu geometrik seri $|r| = \left| -\frac{(x-2)}{2} \right| < 1$ için mutlak yakınsaktır.

$$\text{Toplamı} = \frac{a}{1-r} = \frac{\frac{1}{2}}{1 + \frac{x-2}{2}} = \frac{1}{x} \quad \text{dir.}$$

$$\left| \frac{x-2}{2} \right| < 1 \Rightarrow |x-2| < 2 \Rightarrow \boxed{0 < x < 4} \quad \text{aralığında}$$

Taylor Serisi $\frac{1}{x}$ 'e yakınsar.

Örnek: $\sqrt[3]{1,2}$ için, 2. mertebe Taylor polinomunu kullanarak yaklaşık değer bulunuz.

$$f(x) = \sqrt[3]{x}, \quad a=1 \text{ olsun.} \quad f(1) = 1$$

$$f'(x) = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}} \quad f''(x) = -\frac{2}{9} x^{-5/3}$$

$$\downarrow \\ f'(1) = \frac{1}{3}$$

$$\downarrow \\ f''(1) = -\frac{2}{9}$$

$$f(x) \approx P_2(x) = 1 + \frac{1}{3}(x-1) - \frac{2}{9} \frac{(x-1)^2}{2!}$$

$$f(1,2) \approx P_2(1,2) = 1 + \frac{1}{3} \cdot 0,2 - \frac{2}{9} \frac{(0,2)^2}{2!} = 1,062 //$$

Bazı Önemli Maclaurin Serileri :

$$1) \frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1+x+x^2+\dots \quad (-1 < x < 1)$$

$$2) \frac{1}{1+x} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n = 1-x+x^2-x^3+\dots \quad (-1 < x < 1)$$

$$3) e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\dots \quad (\forall x \in \mathbb{R})$$

$$4) \cos x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} = 1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\dots \quad (\forall x \in \mathbb{R})$$

$$5) \sin x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} = x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}+\dots \quad (\forall x \in \mathbb{R})$$

$$6) \ln(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} = x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\dots \quad (-1 < x \leq 1)$$

$$7) \arctan x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} = x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}-\dots \quad (-1 \leq x \leq 1)$$

Örnek! $f(x) = e^{-x^2/3}$ ün Maclaurin serisini bulunuz.

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \dots$$

$$e^{-x^2/3} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(-\frac{x^2}{3}\right)^n \cdot \frac{1}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{3^n \cdot n!} = 1 - \frac{x^2}{3} + \frac{1}{2!} \frac{x^4}{3^2} + \dots \quad (\forall x \in \mathbb{R})$$

Örnek! $f(x) = \sin^2 x$ in Maclaurin serisinin genel terimini bulunuz.

$$\sin^2 x = \frac{1}{2} (1 - \cos 2x) = \frac{1}{2} \left(1 - 1 + \frac{(2x)^2}{2!} - \frac{(2x)^4}{4!} + \dots \right)$$

$$= \frac{1}{2} \left(\frac{(2x)^2}{2!} - \frac{(2x)^4}{4!} + \frac{(2x)^6}{6!} - \dots \right)$$

$$= \frac{2x^2}{2!} - \frac{2^3 x^4}{4!} + \frac{2^5 x^6}{6!} - \dots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{2^{2n+1} x^{2n+2}}{(2n+2)!} \quad (\forall x \in \mathbb{R})$$

Örnek! $\tan x$ in Maclaurin serisinin ilk 3 terimini $\cos x$ ve $\sin x$ in seri açılımları yardımıyla bulunuz.

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x} = \frac{x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots}{1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \dots}$$

$$\begin{array}{l} x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots \\ - x + \frac{x^3}{2!} + \frac{x^5}{5!} - \dots \hline \end{array} \quad \left| \begin{array}{l} 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \dots \\ x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{5} + \dots \hline \end{array} \right.$$

$$\frac{x^3}{3} - \frac{x^5}{30} - \dots$$

$$- \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{6} - \dots$$

$$\frac{2x^5}{15} - \dots$$

Örnek! $E(x) = \int_0^x e^{-t^2} dt$ nin Maclaurin serisinin genel terimini bulunuz.

$$e^{-t^2} = 1 - t^2 + \frac{t^4}{2} - \frac{t^6}{3!} + \dots \quad (\forall t \in \mathbb{R})$$

$$\begin{aligned} E(x) &= \int_0^x \left[1 - t^2 + \frac{t^4}{2} - \frac{t^6}{3!} + \dots \right] dt = t - \frac{t^3}{3} + \frac{t^5}{10} - \frac{t^7}{7 \cdot 3!} + \dots \Big|_0^x \\ &= x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{10} - \frac{x^7}{7 \cdot 3!} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)n!} \quad (\forall x \in \mathbb{R}) \end{aligned}$$

* Taylor serileri, elemanter olmayan integralleri seriler cinsinden ifade etmek için kullanılabilir.

Örnek! $\int \sin x^2 dx$ integralini bir kuvvet serisi olarak ifade ediniz.

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots \xrightarrow{x \rightarrow x^2} \sin x^2 = x^2 - \frac{x^6}{3!} + \frac{x^{10}}{5!} - \dots$$

$$\int \sin x^2 dx = C + \frac{x^3}{3} - \frac{x^7}{7 \cdot 3!} + \frac{x^{11}}{10 \cdot 5!} - \dots = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1) \cdot n!}$$

* Bazen belirsiz durumdaki limitleri hesaplamak için fonksiyonların Taylor serilerinden faydalanabiliriz.

Örnek! $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin x}{x^3} = ?$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots \right)}{x^3} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{x^3}{3!} - \frac{x^5}{5!} + \dots}{x^3} = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{3!} - \frac{x^2}{5!} + \frac{x^4}{7!} - \dots \right) \\ &= \frac{1}{6} // \end{aligned}$$

Örnek! $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln x}{x-1} = ?$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \dots \xrightarrow{x \rightarrow x-1} \ln x = (x-1) - \frac{(x-1)^2}{2} + \frac{(x-1)^3}{3} - \dots$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln x}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1} \left(1 - \frac{(x-1)}{2} + \frac{(x-1)^2}{3} - \dots \right) = 1 //$$

Örnek! $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - \tan x}{x^3} = ?$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots \right) - \left(x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} - \dots \right)}{x^3} = \lim_{x \rightarrow 0} \left(-\frac{1}{2} - \frac{x^2}{8} - \dots \right) = -\frac{1}{2} //$$

Örnek! $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{\sin x} - \frac{1}{x} \right) = ?$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin x}{x \sin x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots \right)}{x \cdot \left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots \right)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 \left(\frac{x}{3!} - \frac{x^3}{5!} + \dots \right)}{x^2 \left(1 - \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} - \dots \right)} = 0 //$$

Örnek! $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(e^{2x} - 1) \ln(1+x^3)}{(1 - \cos 3x)^2} = ?$

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \dots \xrightarrow{x \rightarrow 2x} e^{2x} = 1 + 2x + \frac{(2x)^2}{2!} + \dots$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \dots \xrightarrow{x \rightarrow 3x} \cos 3x = 1 - \frac{(3x)^2}{2!} + \frac{(3x)^4}{4!} - \dots$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \dots \xrightarrow{x \rightarrow x^3} \ln(1+x^3) = x^3 - \frac{x^6}{2} + \frac{x^9}{3} - \dots$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\left(2x + \frac{(2x)^2}{2} + \dots \right) \cdot \left(x^3 - \frac{x^6}{2} + \frac{x^9}{3} - \dots \right)}{\left(\frac{(3x)^2}{2!} - \frac{(3x)^4}{4!} + \dots \right)^2} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^4 (2 + 2x + \dots)}{x^4 \left(\frac{9}{2} - \frac{3^4 x^2}{4!} + \dots \right)^2} \\ &= 2 \cdot \frac{4}{81} = \frac{8}{81} // \end{aligned}$$

Örnek! Binom serisi,

$$(1+x)^r = 1 + rx + \frac{r(r-1)}{2!} x^2 + \frac{r(r-1)(r-2)}{3!} x^3 + \dots$$

$$= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{r(r-1)(r-2)\dots(r-(n-1))}{n!} x^n \quad (-1 < x < 1)$$

Örnek! $f(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x}}$ in kuvvet serisi temsilini bulunuz.

$$\frac{1}{\sqrt{1+x}} = (1+x)^{-1/2} = 1 - \frac{1}{2}x + \frac{(-\frac{1}{2}) \cdot (-\frac{3}{2})}{2!} x^2 + \frac{(-\frac{1}{2}) \cdot (-\frac{3}{2}) \cdot (-\frac{5}{2})}{3!} x^3 + \dots$$

$$= 1 - \frac{1}{2}x + \frac{1 \cdot 3}{2^2 \cdot 2!} x^2 - \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2^3 \cdot 3!} x^3 + \dots$$

$$= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2n-1)}{2^n \cdot n!} (-x)^n \quad (-1 < x < 1)$$