

Kısmi Türevler :

$z = f(x, y)$ fonksiyonunun x ve y değişkenine göre 1. mertebe kısmi türevleri :

$$* \frac{\partial f}{\partial x} = f_1(x, y) = f_x(x, y) = \frac{\partial z}{\partial x} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h, y) - f(x, y)}{h}$$

(y sabit tutulup x e göre türev alınır.)

$$* \frac{\partial f}{\partial y} = f_2(x, y) = f_y(x, y) = \frac{\partial z}{\partial y} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x, y+h) - f(x, y)}{h}$$

(x sabit tutulup y 'ye göre türev alınır.)

limitlerinin mevcut olması koşulu ile $f_x(x, y)$ ve $f_y(x, y)$ fonksiyonlarıdır.

****** Burada $f_x(x, y)$, y sabit olmak üzere sadece x in bir fonksiyonu olarak göz önüne alınan $f(x, y)$ nin birinci mertebe türevidir.

$f_y(x, y)$, x sabit olmak üzere sadece y 'nin bir fonksiyonu olarak göz önüne alınan $f(x, y)$ nin birinci mertebe türevidir.

Notasyon:

$$\left. \frac{\partial z}{\partial x} \right|_{(a,b)} = f_x(a,b) = f_1(a,b)$$

$$\left. \frac{\partial z}{\partial y} \right|_{(a,b)} = f_y(a,b) = f_2(a,b)$$

Not:

Toplam, çarpım, bölüm için geçerli olan tüm türev kuralları kısmi türevler için de geçerlidir.

Örnek:

$$z = x^3 y^2 + x^4 y + 4x^3 y^4 + y^2$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = ? \quad \frac{\partial z}{\partial y} = ?$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 3x^2 y^2 + 4x^3 y + 12x^2 y^4$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = 2x^3 y + x^4 + 16x^3 y^3 + 2y$$

Örnek!

$$f(x,y) = e^{xy} \cdot \cos(x+y) \Rightarrow f_x(0,\pi) = ?$$

$$f_x(x,y) = y e^{xy} \cdot \cos(x+y) - e^{xy} \cdot \sin(x+y)$$

$$\begin{aligned} f_x(0,\pi) &= \pi \cdot e^0 \cdot \underbrace{\cos \pi}_{-1} - e^0 \cdot \underbrace{\sin \pi}_0 \\ &= -\pi // \end{aligned}$$

Örnek! $f(x,y) = x^2 y$ fonksiyonunun f_y türevini tanımları kullanarak bulunuz.

$$f_y(x,y) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x,y+h) - f(x,y)}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{x^2(y+h) - x^2 y}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cancel{x^2} y + x^2 h - \cancel{x^2} y}{h} = x^2 //$$

$$f_x(x,y) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h,y) - f(x,y)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x+h)^2 y - x^2 y}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cancel{x^2} y + 2xhy + h^2 y - \cancel{x^2} y}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cancel{h}(2xy + hy)}{\cancel{h}} = 2xy //$$

Örnek:

$$f(x,y) = \begin{cases} (x^2+y^2) \cdot \sin \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} & , (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & , (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

$\frac{\partial f}{\partial x}$ ve $\frac{\partial f}{\partial y}$ türevlerinin $(0,0)$ değerlerini

mevcut ise hesaplayınız.

$$\begin{aligned} f_x(0,0) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(0+h,0) - \overbrace{f(0,0)}^0}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h^2 \cdot \sin \frac{1}{\sqrt{h^2}}}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} h \cdot \sin \frac{1}{|h|} = 0 // \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f_y(0,0) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(0,0+h) - f(0,0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h^2 \cdot \sin \frac{1}{\sqrt{h^2}}}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} h \cdot \sin \frac{1}{|h|} = 0 // \end{aligned}$$

Basit Zincir Kuralı (Bileşke Fonksiyonun Türevi)

$z = f(g(x,y))$ için

$$\frac{\partial}{\partial x} f(g(x,y)) = g_x(x,y) f'(g(x,y))$$

$$\frac{\partial}{\partial y} f(g(x,y)) = g_y(x,y) f'(g(x,y))$$

Örnek: $z = f\left(\frac{x}{y}\right)$ ise $x \cdot \frac{\partial z}{\partial x} + y \cdot \frac{\partial z}{\partial y} = 0$

olduğunu gösteriniz.

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{1}{y} f'\left(\frac{x}{y}\right) \Rightarrow x \cdot \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{x}{y} f'\left(\frac{x}{y}\right)$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{x}{y^2} f'\left(\frac{x}{y}\right) \Rightarrow y \cdot \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{x}{y} f'\left(\frac{x}{y}\right)$$

$$\begin{array}{r} + \\ \hline x \cdot \frac{\partial z}{\partial x} + y \cdot \frac{\partial z}{\partial y} = 0 \quad // \end{array}$$

İkiden Fazla Değişkenli Fonksiyonların Türevi:

Eğer $f(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n)$ n değişkenli bir fonksiyon ise o zaman f in her bir değişkene göre alınan n tane kısmi türevi $f_1(x_1, \dots, x_n), f_2(x_1, \dots, x_n), \dots, f_n(x_1, \dots, x_n)$ olur.

Örnek:

$$f(x, y, z) = \frac{2xy}{1+xz+y^2}$$

$$\frac{\partial f}{\partial z} = - \frac{2xy \cdot x}{(1+xz+y^2)^2}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{2y \cdot (1+xz+y^2) - 2xy \cdot z}{(1+xz+y^2)^2}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{2x \cdot (1+xz+y^2) - 2xy \cdot 2y}{(1+xz+y^2)^2}$$

Yüksek Mertebeden Türevler

İkinci ve daha yüksek mertebeden kısmi türevler, hesaplanmış mevcut kısmi türevlerin kısmi türevleri alınarak elde edilir.

* $z = f(x, y)$ için 2. mertebe kısmi türevleri:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial z}{\partial x} \right) = f_{11}(x, y) = f_{xx}(x, y)$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial z}{\partial y} \right) = f_{21}(x, y) = f_{yx}(x, y)$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial z}{\partial y} \right) = f_{22}(x, y) = f_{yy}(x, y)$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial z}{\partial x} \right) = f_{12}(x, y) = f_{xy}(x, y)$$

* $w = f(x, y, z)$ ise;

$$\begin{aligned} \frac{\partial^5 w}{\partial y \partial x \partial y^2 \partial z} &= \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial w}{\partial z} \right) \right) \right) \right) \\ &= f_{32212}(x, y, z) = f_{zyyxy}(x, y, z) \end{aligned}$$

Örnek: $f(x,y) = x \cos y + e^x \cdot y$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}, \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}, \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = ?$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \cos y + y e^x$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = -x \sin y + e^x$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right) = y e^x$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right) = -x \cos y$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right) = -\sin y + e^x$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right) = -\sin y + e^x$$

Örnek: $z = \ln(x^2 + y^2) \Rightarrow \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$ olduğunu

gösteriniz.

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{2x}{x^2 + y^2} \Rightarrow \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{2x^2 + 2y^2 - 4x^2}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{2(y^2 - x^2)}{(x^2 + y^2)^2}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{2y}{x^2 + y^2} \Rightarrow \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{2x^2 + 2y^2 - 4y^2}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{2(x^2 - y^2)}{(x^2 + y^2)^2}$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{\cancel{2y^2} - \cancel{2x^2} + \cancel{2x^2} - \cancel{2y^2}}{(x^2 + y^2)^2} = 0 \quad //$$

Karışık Türevlerin Eşitliği (Shwartz Teoremi)

Eğer $f(x,y)$ ve onun kısmi türevleri f_x, f_y, f_{xy}, f_{yx} (a,b) de sürekli ve (a,b) yi içeren bir bölgede tanımlı iseler,

$$f_{xy}(a,b) = f_{yx}(a,b)$$

dir.

* 2. mertebe türevlerde olan bu eşitlik tüm mertebe karışık türevlerde de geçerlidir.

Örnek: $f(x,y) = e^{kx} \cdot \cos ky \Rightarrow \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$ olduğunu

gösteriniz.

$$\frac{\partial z}{\partial y} = -k \cdot e^{kx} \sin ky$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = -k^2 e^{kx} \sin ky$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = k \cdot e^{kx} \cos ky$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = -k^2 e^{kx} \sin ky$$

Türev ile Süreklilik Arasındaki İlişki:

Çok değişkenli bir fonksiyon bir noktada tüm mertebeden kısmi türevlere sahip olsa dahi o noktada sürekli olmayabilir.

Örnek!

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2} & , (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & , (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Fonksiyonunun $f_x(0,0)$, $f_y(0,0)$ türevlerinin mevcut ancak bu noktada sürekli olmadığını gösteriniz.

$$f_x(0,0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(0+h,0) - f(0,0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{0}{h} = 0$$

$$f_y(0,0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(0,0+h) - f(0,0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{0}{h} = 0$$

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x,y) = \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{xy}{x^2+y^2}$$

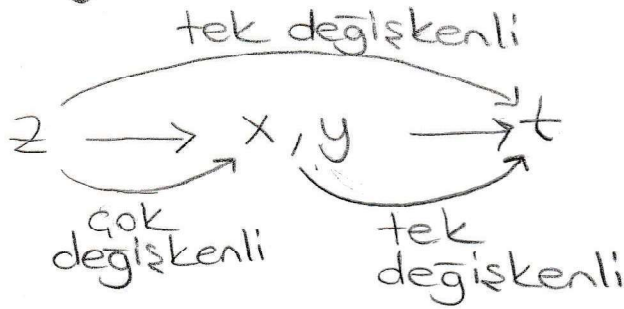
$y=mx$ boyunca limit alalım.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{mx^2}{x^2(1+m^2)} = \frac{m}{1+m^2} \quad m'ye \text{ bağımlı limit yok}$$

Limit mevcut olmadığından fonksiyon $(0,0)$ da sürekli değildir.

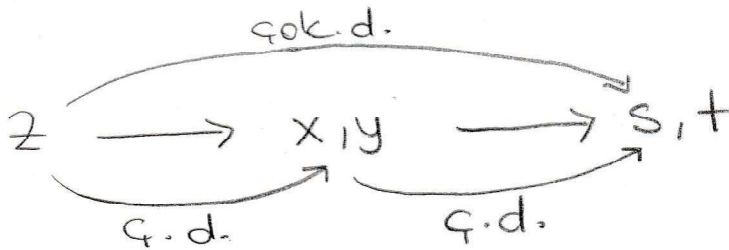
Zincir Kuralı :

1) Eğer $z = z(x, y)$ 1. mertebe türevleri sürekli bir fonksiyon ve $x = x(t)$, $y = y(t)$ türemlenebilir olsun.



$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dt}$$

2) $z = f(x, y)$, $x = x(s, t)$, $y = y(s, t)$



$$\frac{\partial z}{\partial s} = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial s}$$

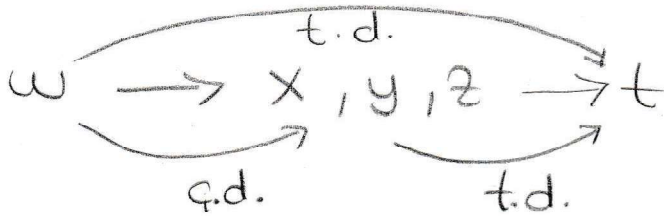
$$\frac{\partial z}{\partial t} = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial t}$$

Örnek!

$$\begin{aligned} w &= xy + z \\ x &= \cos t \\ y &= \sin t \\ z &= t \end{aligned}$$

$$\left. \begin{aligned} w &= xy + z \\ x &= \cos t \\ y &= \sin t \\ z &= t \end{aligned} \right\} \frac{dw}{dt} \Big|_{t=0} = ?$$

(zincir kuralı ile bulunuz.)



$$\begin{aligned} \frac{dw}{dt} &= \frac{\partial w}{\partial x} \cdot \frac{dx}{dt} + \frac{\partial w}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dt} + \frac{\partial w}{\partial z} \cdot \frac{dz}{dt} \\ &= -y \cdot \sin t + x \cdot \cos t + 1 \end{aligned}$$

$$\frac{dw}{dt} \Big|_{t=0} = -0 \cdot \sin 0 + 1 \cdot 1 + 1 = 2 //$$

Örnek!

$$\begin{aligned} w &= 2y + x + z^2 \\ x &= \frac{r}{s} \\ y &= r^2 + \ln s \\ z &= 2r + s \end{aligned}$$

$\left. \begin{aligned} w &= 2y + x + z^2 \\ x &= \frac{r}{s} \\ y &= r^2 + \ln s \\ z &= 2r + s \end{aligned} \right\} \frac{\partial w}{\partial r}, \frac{\partial w}{\partial s} \text{ türevlerini bulunuz.}$

$$\frac{\partial w}{\partial r} = \frac{\partial w}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial w}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial r} + \frac{\partial w}{\partial z} \cdot \frac{\partial z}{\partial r}$$

$$= 1 \cdot \frac{1}{s} + 2 \cdot 2r + 2z \cdot 2 = \frac{1}{s} + 4r + 4(2r+s) //$$

$$\frac{\partial w}{\partial s} = \frac{\partial w}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial w}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial s} + \frac{\partial w}{\partial z} \cdot \frac{\partial z}{\partial s}$$

$$= 1 \cdot \left(-\frac{r}{s^2}\right) + 2 \cdot \frac{1}{s} + 2z \cdot 1 = -\frac{r}{s^2} + \frac{2}{s} + 2(2r+s) //$$

Örnek:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} f(x^2y, x+2y) &=? \\ \frac{\partial}{\partial y} f(x^2y, x+2y) &=? \end{aligned} \right\} \begin{array}{l} \text{türevlerini } f \text{ in kısmi} \\ \text{türevleri cinsinden} \\ \text{yazınız.} \end{array}$$

$$u = x^2y \quad f \rightarrow u, v \rightarrow x, y$$

$$v = x+2y$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial x} = 2xy \cdot f_u + 1 \cdot f_v$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial y} = x^2 \cdot f_u + 2 \cdot f_v$$

Kapalı Fonksiyonların Türevi:

$$F(x, y, z) = 0 \text{ fonksiyonu için } \frac{\partial z}{\partial y}, \frac{\partial z}{\partial x} \text{ türevleri,}$$

$\downarrow$ bağımsız değişken $\downarrow$ bağımlı değişken

1) Direkt türetme ile bulunabilir.

$$2) \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{F_y}{F_z} \quad \frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{F_x}{F_z}$$

İspat: $F(x, y, z) = 0$ $F \xrightarrow{x, y, z \rightarrow x, y}$

$$\frac{\partial F}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial z} \cdot \frac{\partial z}{\partial x} = 0$$

$\underbrace{\frac{\partial x}{\partial x}}_1 \quad \underbrace{\frac{\partial y}{\partial x}}_0$

$$F_x + \frac{\partial z}{\partial x} \cdot F_z = 0 \Rightarrow \frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{F_x}{F_z}$$

Örnek 1
 $z \rightarrow$ bağımlı $x^3 + z^2 + ye^{xz} + z \cos y = 0 \Rightarrow \frac{\partial z}{\partial x} = ?$
 $x, y \rightarrow$ bağımsız
1. yol $3x^2 + 2z \cdot \frac{\partial z}{\partial x} + y \cdot \left(z + x \cdot \frac{\partial z}{\partial x} \right) e^{xz} + \frac{\partial z}{\partial x} \cos y = 0$

$$\frac{\partial z}{\partial x} (2z + yxe^{xz} + \cos y) = -3x^2 - yze^{xz}$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = - \frac{3x^2 + yze^{xz}}{2z + yxe^{xz} + \cos y}$$

2. yol $\frac{\partial z}{\partial x} = - \frac{F_x}{F_z} = - \frac{3x^2 + yze^{xz}}{2z + yxe^{xz} + \cos y}$

Örnek 1 $g\left(\frac{x}{z}\right) = yz$ ise $x \cdot \frac{\partial z}{\partial x} - y \frac{\partial z}{\partial y} = z$

olduğunu gösteriniz.

$z \rightarrow$ bağımlı
 $x, y \rightarrow$ bağımsız

$$F: g\left(\frac{x}{z}\right) - yz = 0$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = - \frac{F_x}{F_z} = - \frac{\frac{1}{z} \cdot g'\left(\frac{x}{z}\right)}{-\frac{x}{z^2} \cdot g'\left(\frac{x}{z}\right) - y}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = - \frac{F_y}{F_z} = - \frac{-z}{-\frac{x}{z^2} g'\left(\frac{x}{z}\right) - y}$$

$$x \cdot \frac{\partial z}{\partial x} - y \cdot \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{-\frac{x}{z} g'\left(\frac{x}{z}\right) + yz}{-\frac{x}{z^2} g'\left(\frac{x}{z}\right) - y} = \frac{z \left(-\frac{x}{z^2} g'\left(\frac{x}{z}\right) + y \right)}{\left(-\frac{x}{z^2} g'\left(\frac{x}{z}\right) - y \right)} = z //$$