

ÇOK DEĞİŞKENLİ FONKSİYONLAR

$D \neq \emptyset$ olmak üzere, $D \subset \mathbb{R}^2$ olsun. D deki her bir (x, y) noktasına bir $z = f(x, y)$ reel sayısını eşleyen f kuralına **iki değişkenli fonksiyon** denir. D kümesine **Tanım Kümesi (Bölgesi)**, $z = f(x, y)$ değerlerinin kümesine de **Değer Kümesi** denir.

İki değişkenli bir fonksiyon genel olarak $z = f(x, y)$ şeklinde gösterilir. Burada x, y bağımsız değişkenler, z ise bu değişkenlere bağlı değişkenlerdir. İki değişkenli fonksiyon $F(x, y, z) = 0$ şeklinde kapalı olarak da ifade edilebilir.

$z = f(x, y)$ fonksiyonu geometrik olarak uzayda bir yüzey üzerindeki bir noktanın z koordinatı olarak temsil edilebilir.

Özet: $f: (x, y) \rightarrow z$ $F(x, y, z) = 0$ kapalı fonksiyon

$z = f(x, y)$ iki değişkenli fonksiyon



bağımlı değişken bağımsız değişkenler

Benzer şekilde $u = f(x, y, z)$; bağımsız değişkenleri x, y, z olan 3-değişkenli bir fonksiyondur.

Genel olarak n değişkenli bir fonksiyon $u = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ şeklindedir.

Not: Bir fonksiyonun kaç değişkenli olduğunu belirlemek için virgülle ayrılmış değişken sayısına bakılır.

Tanım Bölgesi:

$z = f(x, y)$ fonksiyonunun tanım bölgesi f fonksiyonunun tanımlı olduğu (x, y) noktalarının oluşturduğu kümedir.

Bazı fonksiyonların tanım kümeleri:

$$\sqrt{u} \quad u \geq 0$$

$$\sqrt[3]{u} \quad \text{Her } u \in \mathbb{R}$$

$$\frac{u}{v} \quad v \neq 0 \text{ olan noktalar}$$

$$\ln u \quad u > 0$$

$$e^u \quad \text{Her } u \in \mathbb{R}$$

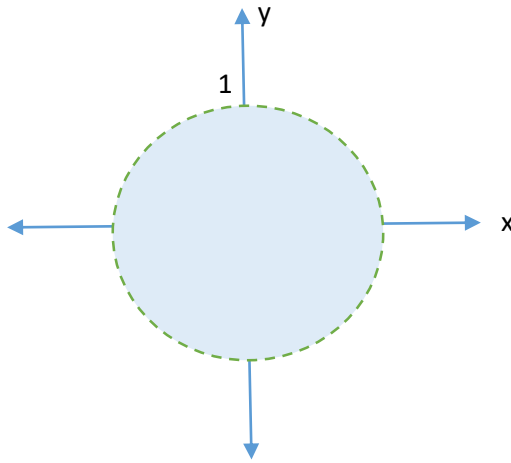
$$\begin{array}{l} \arcsin u \\ \arccos u \end{array} \quad -1 \leq u \leq 1$$

Örnek: $z = \frac{1}{\sqrt{1-x^2-y^2}}$ fonksiyonunun tanım bölgesini bulup

şeklini çizin.

Örnek: $z = \frac{1}{\sqrt{1-x^2-y^2}}$ fonksiyonunun tanım bölgesini bulup şeklini çizin.

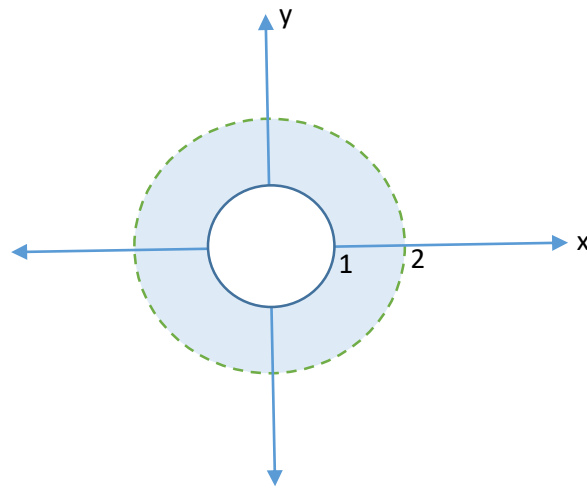
$$1 - x^2 - y^2 > 0 \implies x^2 + y^2 < 1$$



Örnek: $z = \sqrt{x^2 + y^2 - 1} + \ln(4 - x^2 - y^2)$ fonksiyonunun tanım bölgesini bulunuz.

Örnek: $z = \sqrt{x^2 + y^2 - 1} + \ln(4 - x^2 - y^2)$ fonksiyonunun tanım bölgesini bulunuz.

$$\left. \begin{array}{l} x^2 + y^2 - 1 \geq 0 \Rightarrow x^2 + y^2 \geq 1 \\ 4 - x^2 - y^2 > 0 \Rightarrow 4 > x^2 + y^2 \end{array} \right\} 1 \leq x^2 + y^2 < 4$$



Örnek: $z = \frac{1}{\sqrt{9x^2 - y^2}}$ tanım bölgesini bulunuz.

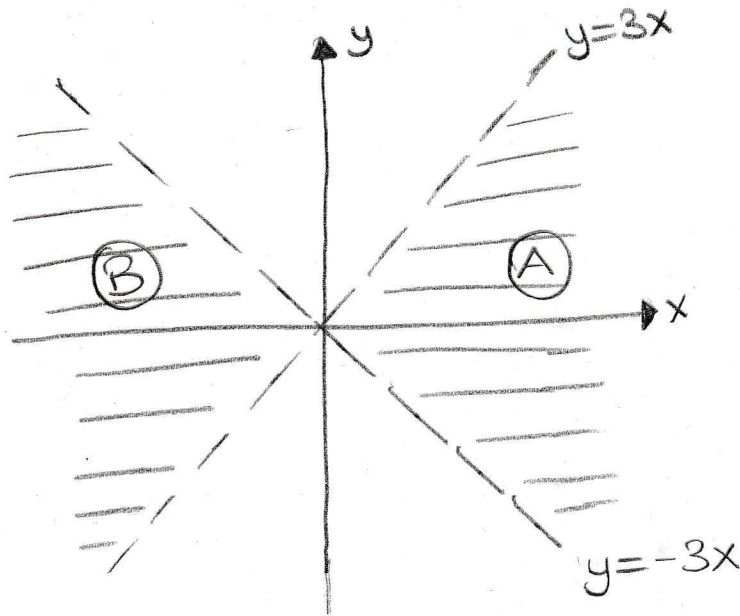
Örnek 1:

$$Z = \frac{1}{\sqrt{9x^2 - y^2}} \text{ tanım bölgesini bulunuz.}$$

$$9x^2 - y^2 > 0 \Rightarrow \begin{matrix} + & + \\ - & - \end{matrix} (3x-y)(3x+y) > 0$$

1. durum: $\begin{cases} 3x-y > 0 \Rightarrow 3x > y \\ 3x+y > 0 \Rightarrow y > -3x \end{cases} \Rightarrow -3x < y < 3x \quad \textcircled{A}$

2. durum: $\begin{cases} 3x-y < 0 \Rightarrow 3x < y \\ 3x+y < 0 \Rightarrow y < -3x \end{cases} \Rightarrow 3x < y < -3x \quad \textcircled{B}$

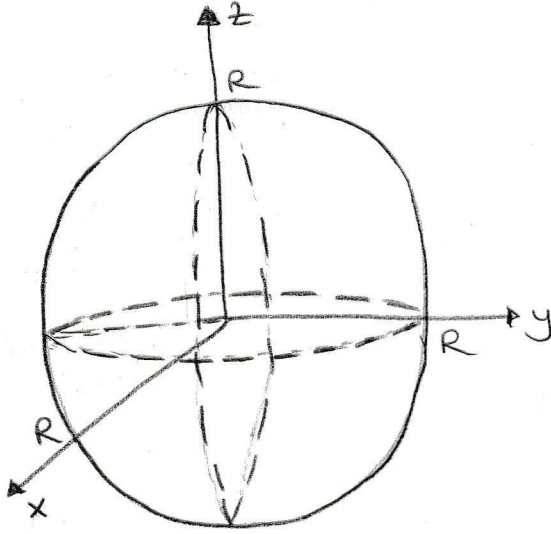


~ Temel Yüzeyler ~

Küre:

$$x^2 + y^2 + z^2 = R^2$$

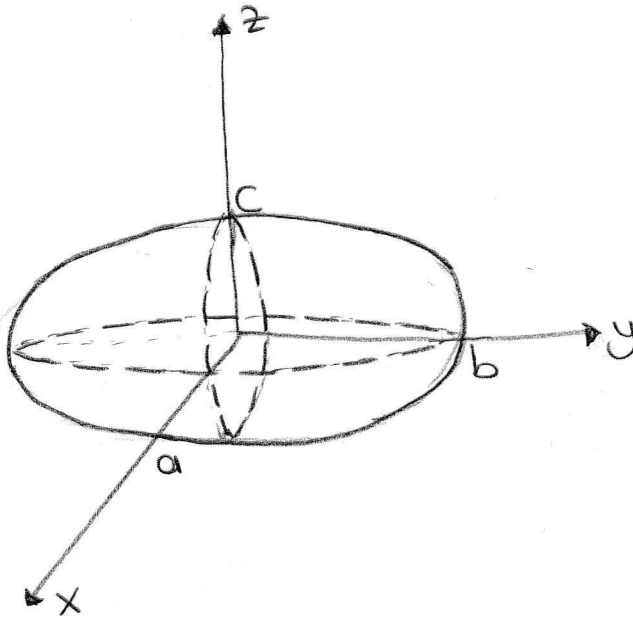
Yarıçapı R olan orijin merkezli küre



Elipsoid:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

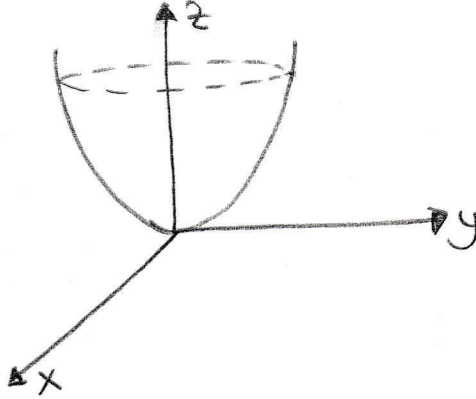
Orijin merkezli elipsoid



Paraboloid;

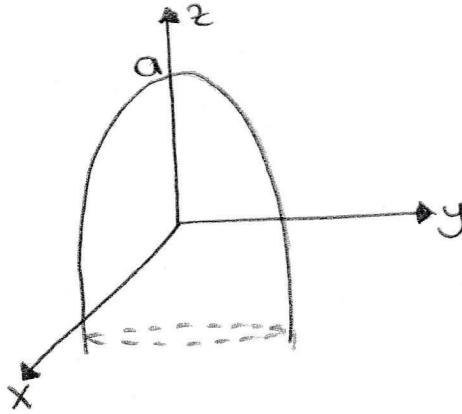
$$* \{ z = ax^2 + by^2 \} \quad (a, b > 0)$$

↓
orjin tepe noktalı, kolları yukarı doğru paraboloid



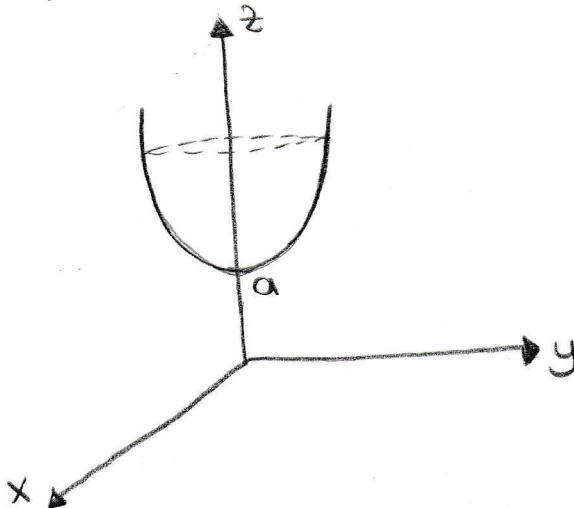
$$* \{ z = a - x^2 - y^2 \}$$

$(0,0,a)$ tepe noktalı kolları aşağı doğru paraboloid



$$* \{ z = a + x^2 + y^2 \}$$

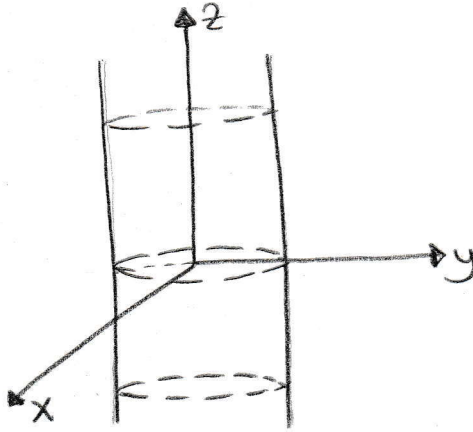
$(0,0,a)$ tepe noktalı kolları yukarı doğru paraboloid



Silindir :

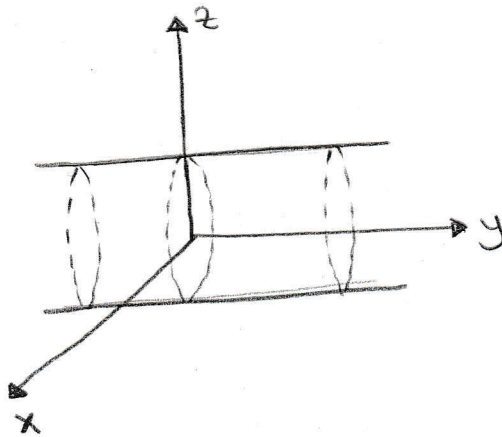
$$x^2 + y^2 = r^2$$

z boyunca uzanan silindir



$$x^2 + z^2 = r^2$$

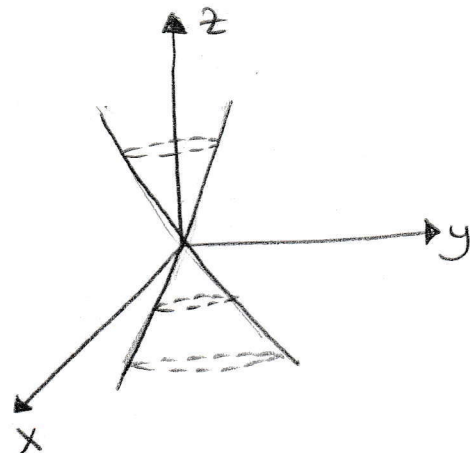
y boyunca uzanan silindir



Koni :

$$x^2 + y^2 = z^2$$

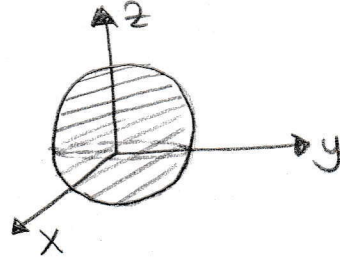
Dairesel koni



Örnek! $w = \sqrt{1-x^2-y^2-z^2}$ tanım bölgesini bulunuz.

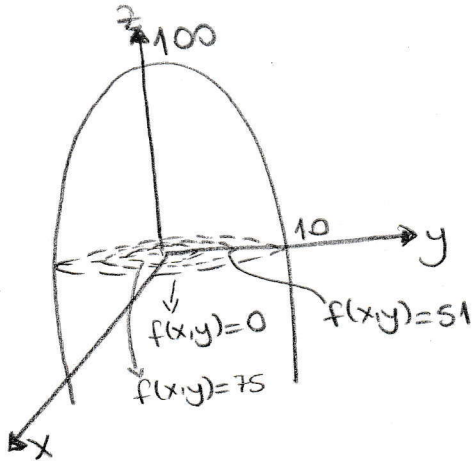
$$1-x^2-y^2-z^2 \geq 0 \Rightarrow x^2+y^2+z^2 \leq 1$$

⇓ Küre



Seviye Eğrisi! Bir $f(x,y)$ fonksiyonunun bir $f(x,y)=c$ sabit değerine sahip olduğu noktaların kümesi f 'in seviye eğrisidir.

Örnek! $f(x,y) = 100-x^2-y^2$ nin şeklini çizip, $f(x,y) = 0, 75, 51$ seviye eğrilerini gösteriniz.



$$\begin{aligned} f(x,y)=0 &\Rightarrow x^2+y^2=100 \text{ çemberi} \\ f(x,y)=51 &\Rightarrow x^2+y^2=49 \text{ çemberi} \\ f(x,y)=75 &\Rightarrow x^2+y^2=25 \text{ çemberi} \end{aligned}$$

Not! Seviye eğrileri $z=f(x,y)$ grafiğinin yatay $z=c$ düzlemleri ile kesişimi olan eğrilerin xy -düzlemi üzerine olan dikey izdüşümleridir.

Örnek! $f(x,y) = x^2 + y^2$ fonksiyonunun seviye eğrilerini gösteriniz.

$$x^2 + y^2 = c \text{ seviye eğrileri}$$

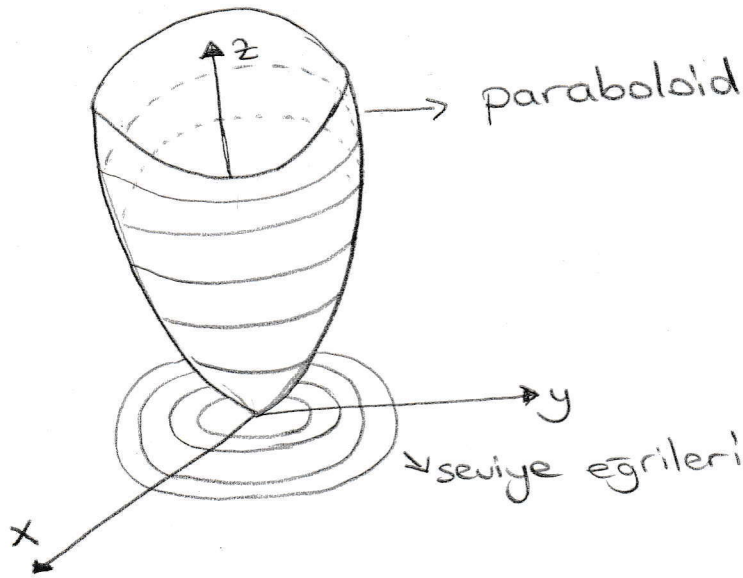
$$x^2 + y^2 = 1$$

$$x^2 + y^2 = 2$$

$$x^2 + y^2 = 3$$

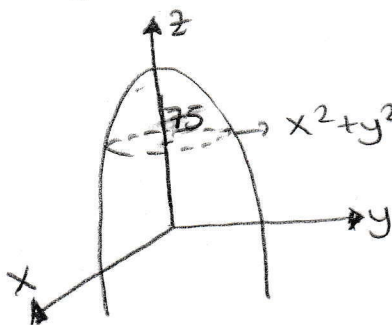
⋮

şeklinde orijin merkezli çemberlerdir.



Kontur Eğrisi! Uzayda bir $z=c$ düzleminin bir $z=f(x,y)$ yüzeyini kestiği eğri $f(x,y)=c$ değerini temsil eden noktalardan oluşur. Buna $f(x,y)=c$ kontur eğrisi denir.

Örnek! $f(x,y) = 100 - x^2 - y^2$ yüzeyinin $f(x,y) = 75$ kontur eğrisini gösteriniz.



$$x^2 + y^2 = 25 \text{ çemberi}$$