DİZİLER

Tanım: Belirli bir kurala göre sıralanmış sayılar topluluğuna dizi denir.

$$\{a_n\} = \{a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots\} = \{a_n\}_{n=1}^{\infty}$$

a_n : genel terim (n. terim) $\rightarrow$ dizinin kuralını belirler.

n : indis $\rightarrow$ a_n teriminin dizideki kaçıncı eleman olduğunu belirler.

Örneğin ; $\{a_n\} = \{n^2\}_{n=1}^{\infty} = \{\underset{n=1}{1}, \underset{n=2}{4}, \underset{n=3}{9}, \underset{n=4}{16}, \dots, n^2, \dots\}$

* Her dizi, $\mathbb{Z}^+$ üzerinde tanımlanmış reel değerli bir fonksiyon olarak düşünülebilir. Yani, $f(n) = \{a_n\} : \mathbb{Z}^+ \rightarrow \mathbb{R}$

$$n \longmapsto a_n$$

Örnekler :

1) $\left\{\frac{1}{n}\right\} = \left\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots\right\}$

2) $\left\{-1, \frac{1}{2}, -\frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots\right\} = \left\{(-1)^n \frac{1}{n}\right\}_{n=1}^{\infty}$

3) $\left\{\frac{1}{2}, \frac{1}{5}, \frac{1}{10}, \frac{1}{17}, \dots\right\} = \left\{\frac{1}{1+n^2}\right\}_{n=1}^{\infty}$

4) $a_1 = 1$, $a_2 = 1$, $a_{n+2} = a_n + a_{n+1}$ ise $\{a_n\}$ in ilk 6 terimini yazın.

$\hookrightarrow$ tekrarlama kuralı

$$\left.\begin{aligned} a_1 &= 1 \\ a_2 &= 1 \\ a_3 &= a_1 + a_2 = 1+1 = 2 \\ a_4 &= a_2 + a_3 = 1+2 = 3 \\ a_5 &= 5 \\ a_6 &= 8 \end{aligned}\right\} \quad \{a_n\} = \{1, 1, 2, 3, 5, 8, \dots\} \rightarrow \text{Fibonacci Dizisi}$$

5) $a_1 = 1$, $n > 1$, $a_n = n \cdot a_{n-1}$ ise $\{a_n\}$ in ilk 4 terimini yazın.

$$\left.\begin{aligned} a_1 &= 1 \\ a_2 &= 2 \cdot a_1 = 2 \cdot 1 = 2 \\ a_3 &= 3 \cdot a_2 = 3 \cdot 2 = 6 \\ a_4 &= 4 \cdot a_3 = 4 \cdot 6 = 24 \end{aligned}\right\} \quad \{a_n\} = \{1, 2, 6, 24, 120, \dots\} \rightarrow \text{Faktöriyel Dizisi}$$

Diziler ile İşlemler :

$\{a_n\}$, $\{b_n\}$ iki dizi ve α bir sabit olmak üzere :

1) $\alpha . \{a_n\} = \{\alpha a_1, \alpha a_2, \dots\} = \{\alpha a_n\}$

2) $\{a_n\} \mp \{b_n\} = \{a_1 \mp b_1, a_2 \mp b_2, \dots, a_n \mp b_n, \dots\} = \{a_n \mp b_n\}$

3) $\dfrac{\{a_n\}}{\{b_n\}} = \left\{\dfrac{a_1}{b_1}, \dfrac{a_2}{b_2}, \dots, \dfrac{a_n}{b_n}\right\} = \left\{\dfrac{a_n}{b_n}\right\}$ $(\forall n \in \mathbb{Z}^+, b_n \neq 0)$

Dizilerle İlgili Bazı Özellikler

1) Sınırlı Diziler :

* $\forall n \in \mathbb{Z}^+$ için $a_n \leq M$ olacak şekilde bir M sayısı varsa, $\{a_n\}$ dizisine üstten sınırlı dizi denir. M, $\{a_n\}$ için bir üst sınırdır. Eğer M, $\{a_n\}$ için bir üst sınır ve M'den küçük hiçbir sayı $\{a_n\}$ için üst sınır değilse M'ye EKÜS denir.

* $\forall n \in \mathbb{Z}^+$ için $m \leq a_n$ olacak şekilde bir m sayısı varsa, $\{a_n\}$ dizisine alttan sınırlı dizi denir. m, $\{a_n\}$ için bir alt sınırdır. Eğer m, $\{a_n\}$ için bir alt sınır ve m'den büyük hiçbir sayı $\{a_n\}$ için alt sınır değilse m'ye EBAS denir.

* Eğer $\{a_n\}$ hem alttan, hem de üstten sınırlı ise $\{a_n\}$'ye sınırlı dizi denir. $\{a_n\}$ sınırlı değilse ona sınırsız dizi denir.

Örnek: $\{a_n\} = \{1, 2, 3, \dots, n, \dots\}$ dizisi alttan 1 ve 1'den küçük her reel sayı ile sınırlıdır. EBAS'ı 1 dir. Dizi üstten sınırlı değildir, dolayısıyla sınırlı değildir. Sınırsız dizidir.

Örnek: $\{a_n\} = \left\{\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \dots, \frac{n}{n+1}, \dots\right\}$ dizisi sınırlı mıdır?

EBAS $\{a_n\} = \frac{1}{2}$

$\Rightarrow$ Sınırlıdır.

EKÜS $\{a_n\} = 1$

2) Monoton Diziler ;

$\forall n \in \mathbb{Z}^+$ için ;

a) $a_n \leq a_{n+1}$ ise $\{a_n\}$ azalmayan dizidir. $\left(\frac{a_{n+1}}{a_n} > 1 \Rightarrow \{a_n\} \text{ azalmayan} \right)$

b) $a_{n+1} \leq a_n$ ise $\{a_n\}$ artmayan dizidir. $\left(\frac{a_{n+1}}{a_n} < 1 \Rightarrow \{a_n\} \text{ artmayan} \right)$

Eğer $\{a_n\}$ dizisi azalmayan veya artmayan bir dizi ise monoton dizidir.

Örnek! $\left\{ \frac{n}{n+1} \right\}$ dizisi monoton mudur?

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\frac{n+1}{n+2}}{\frac{n}{n+1}} = \frac{n^2+2n+1}{n^2+2n} > 1 \Rightarrow a_{n+1} > a_n \Rightarrow \{a_n\} \text{ azalmayan}$$

$\Rightarrow$ Monoton dizidir.

Örnek! $\{a_n\} = \left\{ 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \dots \right\}$ dizisi monoton mudur?

$$\{a_n\} = \left\{ \frac{1}{2^{n-1}} \right\}$$

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\frac{1}{2^n}}{\frac{1}{2^{n-1}}} = \frac{1}{2} < 1 \Rightarrow \{a_n\} \text{ artmayan} \Rightarrow \text{Monoton dizidir.}$$

Bir Dizinin Limiti ;

Dizilerdeki limit kavramı, fonksiyonlardaki limit kavramının bir özel durumudur.

Tanım: $\{a_n\}$ bir dizi olsun. Eğer her $\varepsilon > 0$ sayısı için $n \geq N$ iken $|a_n - L| < \varepsilon$ olacak şekilde bir $N = N(\varepsilon)$ tamsayısı varsa $\{a_n\}$ dizisi L limitine yakınsar denir ve $\lim_{n\to\infty} a_n = L$ ile gösterilir. L'ye dizinin limiti denir.

* Eğer böyle bir L sayısı mevcut değilse $\{a_n\}$ dizisine ıraksak dizi denir.

$\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ $\nearrow$ L (bir reel sayı) $\Rightarrow \{a_n\}$ yakınsak dizi

$\lim\limits_{n\to\infty} a_n \longrightarrow \mp\infty \Rightarrow \{a_n\}$ $\mp\infty$'a ıraksar $\Rightarrow$ Dizi ıraksaktır.

$\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ $\searrow$ Limit yok $\Rightarrow$ Dizi ıraksaktır.

* Fonksiyonlardaki limit kuralları (çarpım, toplam vs...) dizilerde de geçerlidir.

Örnek: $\{a_n\} = \left\{\frac{1}{n}\right\}$ dizisinin limitinin 0 olduğunu limit tanımı ile gösteriniz.

Her $\varepsilon > 0$ için $n \geq N$ iken $\left|\frac{1}{n} - 0\right| < \varepsilon$ olacak şekilde bir $N = N(\varepsilon)$ tamsayısı var mı?

$\frac{1}{n} < \varepsilon \Rightarrow \frac{1}{\varepsilon} < n$ olur. N'yi $\frac{1}{\varepsilon}$ dan büyük herhangi bir tamsayı seçersek sonuç tüm $n \geq N$ ler için sağlanır.

Örnek: $\{a_n\} = \left\{\frac{n-1}{n}\right\}$ dizisi verilsin. $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 1$ olduğunu gösteriniz.

$\forall \varepsilon > 0$ için $n \geq N$ iken $\left|\frac{n-1}{n} - 1\right| < \varepsilon$ o.ş. bir $N = N(\varepsilon)$ var mı?

$\left|\frac{n-1}{n} - 1\right| = \left|-\frac{1}{n}\right| = \frac{1}{n} < \varepsilon \Rightarrow \frac{1}{\varepsilon} < n$ olur. N'yi $\frac{1}{\varepsilon}$ dan büyük herhangi bir tamsayı olarak seçersek sonuç tüm $n \geq N$ için sağlanır.

Limit Kuralları:

$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = A$, $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = B$ (A, B reel sayı) ise;

1) $\lim\limits_{n\to\infty} (a_n \mp b_n) = A \mp B$

2) $\lim\limits_{n\to\infty} k.a_n = k.A$

3) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{A}{B}$ $(B \neq 0)$

* Fonksiyonlardaki limit kuralları diziler için de geçerlidir.

Diziler İçin Sandviç Teoremi:

$\{a_n\}$, $\{b_n\}$ ve $\{c_n\}$ birer reel sayı dizisi olsunlar. Eğer $n \geq N$ iken $a_n \leq b_n \leq c_n$ ve $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} c_n = L$ ise $\lim_{n\to\infty} b_n = L$ dir.

Örnek: $\frac{\cos n}{n} \to 0$ çünkü $-\frac{1}{n} \leq \frac{\cos n}{n} \leq \frac{1}{n}$

$(-1)^n \frac{1}{n} \to 0$ çünkü $-\frac{1}{n} \leq (-1)^n \frac{1}{n} \leq \frac{1}{n}$

Diziler İçin Sürekli Fonksiyon Teoremi:

$\{a_n\}$ bir reel sayı dizisi olsun. Eğer $a_n \to L$ ise ve f fonksiyonu her a_n de tanımlı ve L'de sürekli ise o zaman $f(a_n) \to f(L)$ dir.

Örnek: $\sqrt{\frac{n+1}{n}} \to 1$ olduğunu gösteriniz.

$\frac{n+1}{n} \to 1$ olduğunu biliyoruz. $f(x) = \sqrt{x}$ ve $L = 1$ alınırsa,

$\sqrt{\frac{n+1}{n}} \to \sqrt{1} = 1$ olur.

* Bir dizinin limiti varsa tektir.

Örnek: $\{n\} = \{1, 2, \ldots\}$ dizisi $+\infty$'a ıraksar. Çünkü $\lim_{n\to\infty} n = +\infty$ dur.

$\{(-1)^n\} = \{-1, 1, -1, \ldots\}$ dizisi ıraksaktır. Çünkü $\lim_{n\to\infty} (-1)^n$ mevcut değil.

* Yakınsak bir dizi sınırlıdır. Ancak tersi doğru değildir. Yani, sınırlı bir dizi yakınsak olmak zorunda değildir.

Örnek: $\{a_n\} = \{\sqrt{n^2+2n} - n\}$ dizisinin yakınsaklığını inceleyiniz.

$$\lim_{n\to\infty} \left(\sqrt{n^2+2n} - n\right) = \lim_{n\to\infty} \frac{\cancel{n^2}+2n-\cancel{n^2}}{\sqrt{n^2+2n}+n} = \lim_{n\to\infty} \frac{2\cancel{n}}{\cancel{n}\left(\sqrt{1+\underbrace{\frac{2}{n}}_{0}}+1\right)} = 1$$

Dizi yakınsaktır.

Teorem : Her $n \geq n_0$ için $a_n = f(n)$ olacak şekilde $\{a_n\}$ dizisi ve her $x \geq n_0$ için tanımlı bir $f(x)$ fonksiyonu mevcut olsun.

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = \underbrace{L}_{\text{Sayı} \;/\; \pm\infty} \Rightarrow \lim_{n \to \infty} a_n = L \text{ dir.}$$

(* Yukarıdaki teorem limitin mevcut olması durumunda geçerlidir)

* Bazı dizilerin limitlerini hesaplarken L'Hopital kuralını kullanabiliriz.

Örnek: $\{a_n\} = \left\{\frac{\ln n}{n}\right\}$ dizisi yakınsak mıdır?

$f(x) = \frac{\ln x}{x}$ alalım.

$$\lim_{x \to \infty} \frac{\ln x}{x} \overset{L'H}{=} \lim_{x \to \infty} \frac{\frac{1}{x}}{1} = 0 \Rightarrow \lim_{n \to \infty} \frac{\ln n}{n} = 0 \Rightarrow \{a_n\} \text{ yakınsaktır}$$

Örnek: $\{\sin n\pi\}$ dizisinin yakınsaklığını inceleyiniz.

$f(x) = \sin \pi x \quad (x \in \mathbb{R})$ olarak alınırsa,

$\lim_{n \to \infty} \sin \pi x$ limiti mevcut olmadığından yukarıdaki teoremi kullanamayız, dolayısıyla $\lim_{n \to \infty} (\sin n\pi)$ ıraksaktır diyemeyiz.

$$\{\sin \pi n\} = \underbrace{\{0, 0, \ldots, 0, \ldots\}}_{\text{sabit dizi}} \Rightarrow \lim_{n \to \infty} a_n = 0 \Rightarrow \text{Dizi yakınsaktır.}$$

Monoton Dizi Teoremi :

a) Bir $\{a_n\}$ dizisi alttan sınırlı ve artmayan
b) Bir $\{b_n\}$ dizisi üstten sınırlı ve azalmayan

$\Rightarrow$ Yakınsaktır.

* Üstten sınırlı, azalmayan bir dizinin EKÜS'ü dizinin yakınsadığı sayıdır.
* Alttan sınırlı, artmayan bir dizinin EBAS'ı dizinin yakınsadığı sayıdır.

Örnek: $\left\{\frac{n}{n+1}\right\}$ dizisinin monotonluğunu, sınırlılığını, EBAS ve EKÜS ü inceleyin.

$$\left\{\frac{n}{n+1}\right\} = \left\{\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \dots\right\}$$

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} = \frac{\frac{n}{n+1}}{\frac{n+1}{n+2}} = \frac{n^2+2n}{n^2+2n+1} < 1 \Rightarrow a_n < a_{n+1} \Rightarrow \text{Azalmayan} \Rightarrow \text{Monoton dizi}$$

Dizi alttan $\frac{1}{2}$ ve ondan küçük her sayı ile sınırlıdır.

$$\text{EBAS}\{a_n\} = \frac{1}{2}$$

Dizi üstten 1 ve ondan büyük her sayı ile sınırlıdır.

$$\text{EKÜS}\{a_n\} = 1 \qquad \lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+1} = 1$$

Dizi hem alttan hem de üstten sınırlı olduğu için sınırlıdır.

Sıkça Rastlanan Bazı Limitler:

1) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$

2) $\lim\limits_{n\to\infty} x^{1/n} = 1 \quad (x>0)$

3) $\lim\limits_{n\to\infty} x^n = 0 \quad (|x|<1)$

4) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{x^n}{n!} = 0 \quad (\forall x \text{ için})$

5) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(1+\frac{a}{n}\right)^n = e^a$

6) $\lim\limits_{n\to\infty} x^n = \infty \quad (x>1)$

Örnek: $\left\{\left(\frac{n-2}{n}\right)^n\right\}$ dizisi yakınsak mıdır?

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n-2}{n}\right)^n = \lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{2}{n}\right)^n = e^{-2} \Rightarrow \text{dizi yakınsaktır.}$$

Örnek: $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{3n} = \lim\limits_{n\to\infty} \underbrace{\underbrace{\sqrt[n]{3}}_{3^{1/n}}}_{1} \cdot \underbrace{\sqrt[n]{n}}_{1} = 1$ //

Örnek: $\lim\limits_{n\to\infty}\left(-\frac{1}{2}\right)^n = 0$ //

Örnek: $\{a_n\} = \left\{\left(2-\frac{1}{2^n}\right)\cdot\left(3+\frac{1}{2^n}\right)\right\}$ dizisi yakınsak mıdır?

$$\lim_{n\to\infty}\left[\left(2-\underbrace{\frac{1}{2^n}}_{0}\right)\cdot\left(3+\underbrace{\frac{1}{2^n}}_{0}\right)\right] = 2.3 = 6 \Rightarrow \text{dizi yakınsaktır.} \text{ //}$$