3) $f(x)=\begin{cases} 1-\cos x, & x\le 0 \\ \sqrt{x}\sin x, & x>0 \end{cases} \Rightarrow f'(0)=?$

(*) $\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-}(1-\cos x)=0 \\ \lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}\sqrt{x}\sin x=0\end{array}\right] = \text{ ve } f(0)=0$

$\Rightarrow \lim\limits_{x\to 0} f(x)=f(0)$ old. dan $x=0$ da süreklidir

(*) $f'(0^-)=\lim\limits_{h\to 0^-}\dfrac{f(0+h)-f(0)}{h}=\lim\limits_{h\to 0^-}\dfrac{1-\cos h-0}{h}=\lim\limits_{h\to 0^-}\dfrac{1-\cos^2 h}{h(1+\cos h)}$

$=\dfrac{1}{2}\lim\limits_{h\to 0^-}\dfrac{\sin^2 h}{h}=\dfrac{1}{2}\lim\limits_{h\to 0^-}\dfrac{\sin h}{h}.\sin h=\dfrac{1}{2}.1.0=0$

$f'(0^+)=\lim\limits_{h\to 0^+}\dfrac{f(0+h)-f(0)}{h}=\lim\limits_{h\to 0^+}\dfrac{\sqrt{h}\sin h-0}{h}=0.1=0$

$\Rightarrow f'(0^-)=f'(0^+)=0$ old. dan $f'(0)=0$ dır.

4) $f(x)=\begin{cases} \dfrac{x}{1+e^{1/x}}, & x\neq 0 \\ 0, & x=0 \end{cases} \Rightarrow x=0$ da türevlenebilirliğini araştırınız.

$\boxed{\lim\limits_{x\to 0^-} e^{\frac{1}{x}}=0}$

$\boxed{\lim\limits_{x\to 0^+} e^{\frac{1}{x}}=\infty}$

(*) $x=0$ da sürekli midir?

$\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{x}{1+e^{\frac{1}{x}}}=\dfrac{0}{1+0}=0$

$\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{x}{1+e^{\frac{1}{x}}}=\dfrac{0}{1+\infty}=0$

$\Rightarrow \lim\limits_{x\to 0} f(x)=0=f(0)$ old. dan $x=0$ da süreklidir ✓

(*) Şimdi $x=0$ da sol ve sağ türevlerine bakmalıyız:

Scanned with CamScanner

$\rightarrow f'(0^-) = \lim_{h \to 0^-} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim_{h \to 0^-} \frac{\frac{h}{1+e^{1/h}} - 0}{h} = \lim_{h \to 0^-} \frac{1}{1+e^{1/h}} = 1$

$\rightarrow f'(0^+) = \lim_{h \to 0^+} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim_{h \to 0^+} \frac{\frac{h}{1+e^{1/h}} - 0}{h} = \lim_{h \to 0^+} \frac{1}{1+e^{1/h}} = 0$

$\Rightarrow f'(0^-) \neq f'(0^+)$ old. dan $x=0$ da bir türeve sahip değildir. ($x=0$ da türevi yoktur)

:) Fonk., $x=0$ da sürekli fakat $x=0$ da türevi yoktur.

⑤ $f(x) = \begin{cases} x \arctan \frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$ ise $x=0$ da türevlenebilir midir?

:) EVET

$$\boxed{\begin{aligned} &\lim_{x \to 0^+} \arctan \frac{1}{x} = \frac{\pi}{2} \\ &\lim_{x \to 0^-} \arctan \frac{1}{x} = -\frac{\pi}{2} \end{aligned}}$$

old. nu UNUTMAYINIZ :)

5) $f(x) = \begin{cases} x^2 + x, & x < 0 \\ x+1, & x \geq 0 \end{cases}$ ile verilen f fonk.nu için eğer mevcut ise $f'(0)$ değerini bulunuz.

ⓧ $x=0$ da sürekli midir?

$\left.\begin{aligned} &\lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0^-} (x^2+x) = 0 \\ &\lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^+} (x+1) = 1 \end{aligned}\right\} \neq$ old. dan $x=0$ da sürekli değildir.

Dolayısıyla, $f(x)$ in $x=0$ da türevinden bahsedilemez.

6) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{(1-x^2)^{2/5}-1}{x} = ?$

$f(x) = (1-x^2)^{2/5}$ olsun. $f(0)=1$ olur.

$f'(0) = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{(1-x^2)^{2/5}-1}{x} = f'(0)$ demektir.

Öyleyse $f'(x) = \dfrac{2}{5}(1-x^2)^{-\frac{3}{5}} \cdot (-2x)$

$f'(0) = \dfrac{2}{5} \cdot 0 = \underline{\underline{0}}$ olup

$\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{(1-x^2)^{2/5}-1}{x} = \underline{\underline{0}}$ dır.

7) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{(2x-1)^{3/8}-1}{x-1} = ?$

$f(x) = (2x-1)^{3/8}$ alınacak $f(1)=1$

$f'(1) = \lim\limits_{x\to 1} \dfrac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim\limits_{x\to 1} \dfrac{(2x-1)^{3/8}-1}{x-1}$ demektir.

$f'(x) = \dfrac{3}{8}(2x-1)^{-\frac{5}{8}} \cdot 2 \Rightarrow f'(1) = \dfrac{3}{8} \cdot 2 = \dfrac{3}{4}$ //

8) $y = x^2-3x+1$ eğrisinin $y = x-2$ doğrusuna paralel olan teğet doğrusunu bulunuz.

$m_T = m$ ise $\theta = 0°$ dir. (Paralellik şartı)

$\boxed{y = x-3}$

9) $y = x^3+3x^2-1$ eğrisinin $x-3y+3=0$ doğrusuna dik olan teğet doğrusunu bulunuz. $m_T \perp m \Leftrightarrow m_T \cdot m = -1$ dir $\Rightarrow \theta = 90°$ dir.

teğet doğrularını bulunuz.

$\boxed{3x+y+2=0}$

Scanned with CamScanner

1) Eğer mevcut ise $f(x)=\begin{cases} x^2-x & , x\leq 1 \\ x-1 & , x>1 \end{cases}$ için $f'(1)$ değerini bulunuz.

Önce $x=1$ deki sürekliliğine bakmalıyız

$\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^-}(x^2-x)=0$; $\lim\limits_{x\to 1^+}(x-1)=0$; $f(1)=0$

$x=1$ de süreklidir.

$\Rightarrow \lim\limits_{x\to 1} f(x)=0=f(1)$ old. dan

$f'(1^-)=\lim\limits_{h\to 0^-}\dfrac{f(1+h)-f(1)}{h}=\lim\limits_{h\to 0^-}\dfrac{(1+h)^2-(1+h)-0}{h}=\lim\limits_{h\to 0^-}\dfrac{h(1+h)}{h}=1$

$f'(1^+)=\lim\limits_{h\to 0^+}\dfrac{f(1+h)-f(1)}{h}=\lim\limits_{h\to 0^+}\dfrac{(1+h-1)-0}{h}=1$

$\Rightarrow f'(1^-)=f'(1^+)$ old. dan $f'(1)=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(1+h)-f(1)}{h}=1$ dir.

2) $f(x)=\begin{cases} x^3 & , x\leq 1 \\ ax^2+bx, & x>1 \end{cases}$ fonk. nu $x=1$ de türevlenebilir olması için a ve b ne olmalıdır!

Önce $x=1$ deki sürekliliğini talep ederiz: Yani

$\lim\limits_{x\to 1} f(x)=f(1)$ olmalıdır $f(1)=1$

$\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^-} x^3=1$

$\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^+}(ax^2+bx)=a+b$

$\Rightarrow \boxed{a+b=1}$

Şimdi $x=1$ deki sol ve sağ türevlerine bakalım:

$f'(1^-)=\lim\limits_{h\to 0^-}\dfrac{f(1+h)-f(1)}{h}=\lim\limits_{h\to 0^-}\dfrac{(1+h)^3-1}{h}=\lim\limits_{h\to 0^-}((1+h)^2+1+h+1^2)=3$

$f'(1^+)=\lim\limits_{h\to 0^+}\dfrac{f(1+h)-f(1)}{h}=\lim\limits_{h\to 0^+}\dfrac{a(1+h)^2+b(1+h)-1}{h}=\lim\limits_{h\to 0^+}[(2+h)a+b]=2a+b$

$\Rightarrow \boxed{2a+b=3}$ $\Rightarrow \boxed{a=2,\ b=-1}$

Scanned with CamScanner