Teğet Düzlem - Normal Doğru

Düzlem → Nokta, Normal vektör

Doğru → Nokta, Yön vektörü

$f(x,y,z)=c$ yüzeyinin (x_0,y_0,z_0) daki teğet düzlemini ve normal doğrusunu bulmak için:

$$\nabla f = \frac{\partial f}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial f}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial f}{\partial z}\vec{k}$$ yüzeye diktir.

∇f yüzeye dik → teğet düzleme dik, normal doğruya paralel

$$\nabla f\Big|_{(x_0,y_0,z_0)} = \underbrace{\frac{\partial f}{\partial x}\Big|_{(x_0,y_0,z_0)}}_{A}\vec{i} + \underbrace{\frac{\partial f}{\partial y}\Big|_{(x_0,y_0,z_0)}}_{B}\vec{j} + \underbrace{\frac{\partial f}{\partial z}\Big|_{(x_0,y_0,z_0)}}_{C}\vec{k}$$

$$= \langle A, B, C \rangle$$

Teğet Düzlem:

$$\boxed{A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0}$$

Normal Doğru:

$$\boxed{\begin{aligned} x &= x_0 + At \\ y &= y_0 + Bt \\ z &= z_0 + Ct \end{aligned}}$$

Örnek: $z = 9 - x^2 - y^2$ yüzeyinin $P(1,2,4)$ deki teğet düzlemini, normal doğrusunu bulunuz.

$f: \; z + x^2 + y^2 - 9 = 0$

$\nabla f = 2x\vec{i} + 2y\vec{j} + \vec{k}$

$\nabla f|_P = \langle 2, 4, 1 \rangle$

Teğet Düzlem: $\; 2.(x-1) + 4(y-2) + (z-4) = 0$

Normal Doğru: $\; x = 1 + 2t$

$y = 2 + 4t$

$z = 4 + t$ //

Örnek: $z = x\cos y - ye^x$ yüzeyine $P(0,0,0)$ noktasında teğet olan düzlemi bulunuz.

$f: \; z - x\cos y + ye^x = 0$

$f_x = -\cos y + ye^x \qquad f_x|_P = -1$

$f_y = x\sin y + e^x \qquad f_y|_P = 1$

$f_z = 1 \qquad f_z|_P = 1$

$\nabla f|_P = \langle -1, 1, 1 \rangle$

$-1(x-0) + 1(y-0) + 1(z-0) = 0$

$\boxed{-x + y + z = 0}$ //

Örnek: $f(x,y,z) = x^2 + y^2 - 2 = 0$ silindiri ve $g(x,y,z) = x + z - 4 = 0$ düzlemi bir E elipsinde kesişiyor. $P(1,1,3)$ noktasında E'ye teğet olan doğrunun denklemini bulunuz.

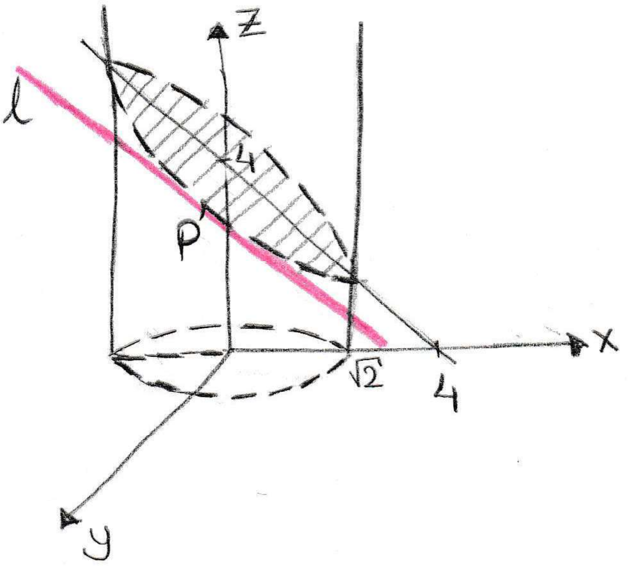
Örnek: $f(x,y,z)=x^2+y^2-2=0$ silindiri ve $g(x,y,z)=x+z-4=0$ düzlemi bir E elipsinde kesişiyor. $P(1,1,3)$ noktasında E'ye teğet olan doğrunun denklemini bulunuz.

$x^2+y^2-2=0$

$x^2+y^2=2 \Rightarrow$ silindir (z-boyunca uzanan)

$x+z-4=0$

$x+z=4 \Rightarrow$ düzlem



l doğrusu $\begin{cases} \text{- nokta (P)} \\ \text{- yön vektörü } \vec{v} \end{cases}$

silindire teğet → ∇f silindire dik → $\nabla f \perp \vec{v}$

düzleme teğet → normal vektörü $\perp \vec{v}$ → $\vec{n} \perp \vec{v}$

$\vec{v} = \nabla f \times \vec{n}$

$\vec{n} = \langle 1,0,1 \rangle \rightarrow$ düzlemin normali

$\nabla f = \langle 2x, 2y, 0 \rangle \Rightarrow \nabla f_P = \langle 2,2,0 \rangle$

$$\vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \langle 2,-2,-2 \rangle \Rightarrow \left.\begin{aligned} x &= 1+2t \\ y &= 1-2t \\ z &= 3-2t \end{aligned}\right\} \text{ teğet doğrusu}$$

$P(1,1,3)$

Lineerleştirme :

Bir $f(x,y)$ fonksiyonunun (x_0,y_0) daki lineerleştirmesi :

$$\boxed{L(x,y)=f(x_0,y_0)+f_x(x_0,y_0)\cdot(x-x_0)+f_y(x_0,y_0)\cdot(y-y_0)}$$

dır. $f(x,y)\approx L(x,y)$ dir. $L(x,y)$ yaklaşımı f in (x_0,y_0) daki lineer yaklaşımıdır.

* 3 değişkenli $f(x,y,z)$ fonksiyonunun $P(x_0,y_0,z_0)$ daki lineerleştirmesi :

$$\boxed{L(x,y,z)=f(x_0,y_0,z_0)+f_x\big|_p(x-x_0)+f_y\big|_p(y-y_0)+f_z\big|_p(z-z_0)}$$

$$f(x,y,z)\approx L(x,y,z)$$

Örnek: $f(x,y)=x^2-xy+\frac{1}{2}y^2+3$ fonksiyonunun $(3,2)$ deki lineerleştirmesini bulunuz.

$$L(x,y)=f(3,2)+f_x(3,2)\cdot(x-3)+f_y(3,2)\cdot(y-2)$$

$$f_x=2x-y \Rightarrow f_x(3,2)=6-2=4$$

$$f_y=-x+y \Rightarrow f_y(3,2)=-3+2=-1$$

$$f(3,2)=8$$

$$L(x,y)=8+4\cdot(x-3)-1(y-2)=4x-y-2 \quad //$$

Örnek: $(1.1)^2+(2.5)^3$ sayısı için bir yaklaşık değer bulunuz.

$$f(x,y)=x^2+y^3 \qquad P(1,2)$$

$$f_x=2x \Rightarrow f_x(1,2)=2$$

$$f_y=3y^2 \Rightarrow f_y(1,2)=12$$

$$f(1,2)=9$$

$$L(x,y)=f(1,2)+f_x|_P(x-1)+f_y|_P(y-2)$$

$$L(x,y)=9+2(x-1)+12(y-2)$$

$$f(x,y)\approx L(x,y)$$

$$f(1.1,2.5)\approx L(1.1,2.5)=9+2(1.1-1)+12(2.5-2)$$

$$=9+0.2+6=15.2$$

$$(1.1)^2+(2.5)^3\approx 15.2 \quad //$$

Diferansiyel :

Eğer (x_0, y_0) dan yakınındaki bir (x_0+dx, y_0+dy) noktasına hareket edersek, f in lineerleştirmesinden elde edilen değişim:

$$\boxed{df = f_x(x_0,y_0) \cdot dx + f_y(x_0,y_0) \cdot dy}$$

f in tam diferansiyeli olarak adlandırılır.

$(\Delta x \approx dx \quad , \quad \Delta y \approx dy \qquad \Delta f \approx df)$

Örnek: Silindirik bir konserve kutusunun 3cm. yarıçap ve 12 cm yüksekliğe sahip olacak şekilde tasarlandığını ancak yarıçap ve yüksekliğin sırasıyla $dr = 0{,}08$, $dh = -0{,}3$ miktarında değiştiğini varsayalım. Konserve kutusunun hacmindeki değişimi bulunuz.

$V = \pi r^2 h$ (silindirin hacmi)

$V_r = 2\pi r h \qquad dr = 0{,}08 \qquad r_0 = 3 \qquad V_r(3,12) = 72\pi$

$V_h = \pi r^2 \qquad dh = -0{,}3 \qquad h_0 = 12 \qquad V_h(3,12) = 9\pi$

$$\begin{aligned} \Delta V \approx dV &= V_r(r_0,h_0) \cdot dr + V_h(r_0,h_0) \cdot dh \\ &= 72\pi \cdot (0{,}08) + 9\pi \cdot (-0{,}3) \\ &= 5{,}76\pi - 2{,}7\pi \\ &= 3{,}06\pi \qquad \Delta V \approx 3{,}06\pi \end{aligned}$$

//

Örnek: $(2.05)\, e^{(2.05)^2 - 3.9}$ değerini

a) Lineerizasyon
b) Diferansiyel hesap

ile yaklaşık olarak hesaplayınız.

$f(x,y) = x.e^{x^2-y}$ $\quad x_0 = 2$, $y_0 = 4$ $\quad P(2,4)$

$f_x = e^{x^2-y} + x.2x.e^{x^2-y}$ $\quad f_x|_P = 1+8 = 9$

$f_y = -x.e^{x^2-y}$ $\quad f_y|_P = -2$

$f(2,4) = 2$

a) $L(x,y) = f(2,4) + f_x|_P(x-2) + f_y|_P(y-4)$

$L(x,y) = 2 + 9(x-2) - 2(y-4)$

$f(x,y) \approx L(x,y) = 2 + 9(x-2) - 2(y-4)$

$f(2.05, 3.9) \approx 2 + 9(2.05-2) - 2(3.9-4)$

$\approx 2 + 0,45 + 0,2 = 2,65$ //

b) $dz = f_x|_P . dx + f_y|_P . dy$

$dx \approx \Delta x = 2.05 - 2 = 0.5$

$dy \approx \Delta y = 3.09 - 4 = -0.1$

$dz \approx \Delta z = f(2.05, 3.9) - f(2,4)$

$f(2.05, 3.9) - 2 \approx 9.\,0{,}05 - 2.(-0{,}1)$

$f(2.05, 3.9) \approx 2 + 0{,}45 + 0{,}2$

$\approx 2{,}65$ //