~ LİMİT VE SÜREKLİLİK ~

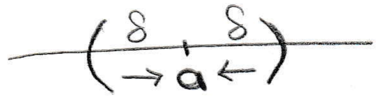
Limit: Her ε pozitif sayısı için
$\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2} < \delta$ iken

$|f(x,y)-L| < \varepsilon$ olacak şekilde bir $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ sayısı varsa $f(x,y)$ nin limiti L dir denir ve

$\lim\limits_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y) = L$ şeklinde gösterilir.

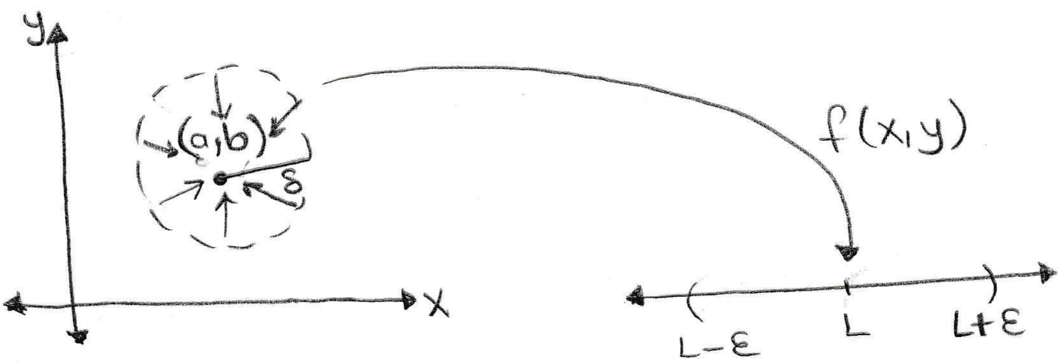
Tek değişkenli

$x \to a$ iken $f(x) \to L$



iki değişkenli

$(x,y) \to (a,b)$ iken $f(x,y) \to L$



(a,b) noktasının δ komşuluğundaki noktaların görüntüsü $(L-\varepsilon, L+\varepsilon)$ aralığında sıralanırlar

* Eğer limit varsa tektir.

* Tek değişkenli bir $f(x)$ fonksiyonu için $\lim_{x \to a} f(x)$ in varlığı x, a'ya sağdan veya soldan yaklaşırken $f(x)$'in aynı sonlu sayıya yaklaşmasını gerektirir. Benzer olarak, iki değişkenli bir fonksiyon için, (x,y), (a,b) ye nasıl yaklaşırsa yaklaşsın eğer $f(x,y)$ aynı L sayısına yaklaşıyorsa o zaman $\lim_{(x,y) \to (a,b)} f(x,y) = L$ limitine sahiptir.

Limit Kuralları:

$\lim_{(x,y) \to (a,b)} f(x,y) = L$ $\quad$ $\lim_{(x,y) \to (a,b)} g(x,y) = M$ ise,

a) $\lim_{(x,y) \to (a,b)} (f \mp g) = L \mp M$

b) $\lim_{(x,y) \to (a,b)} \dfrac{f}{g} = \dfrac{L}{M}$ ($M \neq 0$ koşuluyla)

Örnek: $\lim_{(x,y) \to (1,1)} (4x^2 + y^3) = 4 + 1 = 5$ //

$\lim_{(x,y) \to (2,1)} \dfrac{x-y}{x^2+y^2} = \dfrac{1}{5}$ //

Örnek: $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{4xy^2}{x^2+y^2} = 0$ olduğunu gösteriniz.

Her $\varepsilon > 0$ için $\sqrt{x^2+y^2} < \delta$ iken

$\left| \dfrac{4xy^2}{x^2+y^2} - 0 \right| < \varepsilon$ olacak şekilde bir $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$

sayısı var mıdır?

$$\left| \frac{4xy^2}{x^2+y^2} \right| = \frac{4|x|y^2}{x^2+y^2} \leq \frac{4|x|\cancel{(x^2+y^2)}}{\cancel{(x^2+y^2)}} = 4|x|$$

$$= 4|x| = 4\sqrt{x^2} \leq 4\sqrt{x^2+y^2} < 4\delta = \varepsilon$$

$4\delta = \varepsilon \Rightarrow \delta = \dfrac{\varepsilon}{4} > 0$ bulunur. Yani,

$\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{4xy^2}{x^2+y^2} = 0$ dır.

Örnek: 1) $\lim\limits_{(x,y)\to(0^+,0^+)} \dfrac{x^2-xy}{\sqrt{x}-\sqrt{y}} = ?$

2) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{1-\cos xy}{xy} = ?$

1) $$\lim_{(x,y)\to(0^+,0^+)} \frac{x\,\cancel{(\sqrt{x}-\sqrt{y})}(\sqrt{x}+\sqrt{y})}{\cancel{(\sqrt{x}-\sqrt{y})}} = \lim_{(x,y)\to(0^+,0^+)} x(\sqrt{x}+\sqrt{y}) = 0$$ //

2) $$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{1-\cos xy}{xy} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{1-\left(1-2\sin^2\frac{xy}{2}\right)}{xy}$$

$$= \lim_{(x,y)\to(0,0)} \cancel{2}\cdot\underbrace{\frac{\sin\frac{xy}{2}}{\frac{xy}{2}\cdot\cancel{2}}}_{\to 1}\cdot\underbrace{\sin\frac{xy}{2}}_{0} = 0$$ //

Sandviç (Sıkıştırma Teoremi);

$(x,y)\neq(x_0,y_0)$ için, merkezi (x_0,y_0) da olan bir dairenin içinde $g(x,y)\leq f(x,y)\leq h(x,y)$ ise ve $(x,y)\to(x_0,y_0)$ iken $g(x,y)$ ile $h(x,y)$ aynı L limitine yaklaşıyorlarsa o zaman $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)=L$ dir.

Örnek:

$$f(x,y)=\begin{cases} x^2\cdot\sin\frac{1}{y}, & y\neq 0 \\ 0, & y=0 \end{cases}$$

ile verilen $f(x,y)$ fonksiyonunun $(0,0)$ noktasındaki limiti hesaplayınız.

$y \neq 0$ için $\quad -1 \leq \sin\frac{1}{y} \leq 1$ dir.

$\forall\, x \in \mathbb{R}$ ve $y \neq 0$ için $\quad -x^2 \leq x^2 \sin\frac{1}{y} \leq x^2$ dir.

$\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} -x^2 = \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} x^2 = 0$ olduğundan Sıkıştırma Teoremine

göre, $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} x^2 \cdot \sin\frac{1}{y} = 0$ dır. //

İki Kat Limit (Ardışık Limit);

$\lim\limits_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y)$ için;

$\lim\limits_{x\to a}\left(\lim\limits_{y\to b} f(x,y)\right) = L_1$ ve $\lim\limits_{y\to b}\left(\lim\limits_{x\to a} f(x,y)\right) = L_2$ olsun.

a) $L_1 = L_2$ ise fonksiyonun (a,b) noktasında iki kat limiti vardır. (Bunu söylemek, $f(x,y)$ nin (a,b) de limite sahip olduğunu söylemeye yetmez.)

b) $L_1 \neq L_2$ ise fonksiyonun (a,b) de iki kat limiti yoktur. Dolayısıyla limiti yoktur.

Limitin Yokluğunu Göstermek için Çift Yol Testi !

Eğer bir $f(x,y)$ fonksiyonunun; (x,y) noktası farklı iki yol boyunca (a,b) ye yaklaşırken farklı limitleri varsa bu durumda $\lim\limits_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y)$ mevcut değildir.

* Örneğin $(0,0)$ noktasında $f(x,y)$ nin limitinin mevcut olmadığını göstermek için:

1. yol: $\left.\begin{array}{l} y=x \\ y=x^2 \\ y=x^3 \\ \vdots \end{array}\right\}$ yolları boyunca alınan limitlerin sonucunun farklı olduğu gösterilerek limitin olmadığı söylenebilir.

2. yol: $\left.\begin{array}{l} y=kx \\ y=kx^2 \\ y=kx^3 \\ \vdots \end{array}\right\}$ yolları boyunca alınan limitlerin sonucunun k'ya bağlı olduğu gösterilerek limitin olmadığı söylenebilir.

3. yol: iki kat limitin olmadığı gösterilerek limitin olmadığı söylenebilir.

Örnek: $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{3x^2-y^2}{3y^2+x^2}$ limitinin varlığını araştırınız.

1. yol $y=x$ boyunca limit alalım:

$$\lim_{x\to 0} \frac{3x^2-x^2}{3x^2+x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{2\cancel{x^2}}{4\cancel{x^2}} = \frac{1}{2}$$

$y=x^2$ boyunca limit alalım:

$$\lim_{x\to 0} \frac{3x^2-x^4}{3x^4+x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{\cancel{x^2}(3-x^2)}{\cancel{x^2}(3x^2+1)} = 3$$

$\neq$ limit yok!

2. yol $y=kx$ boyunca limit alalım:

$$\lim_{x\to 0} \frac{3x^2-k^2x^2}{3k^2x^2+x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{\cancel{x^2}(3-k^2)}{\cancel{x^2}(3k^2+1)} = \frac{3-k^2}{3k^2+1}$$

Sonuç k'ya bağlı olduğundan limit yok!

3. yol iki kat limitine bakalım:

$$\lim_{x\to 0}\left[\lim_{y\to 0} \frac{3x^2-y^2}{3y^2+x^2}\right] = \lim_{x\to 0}\left(\frac{3\cancel{x^2}}{\cancel{x^2}}\right) = 3$$

$\neq$

$$\lim_{y\to 0}\left[\lim_{x\to 0} \frac{3x^2-y^2}{3y^2+x^2}\right] = \lim_{y\to 0}\left(\frac{-\cancel{y^2}}{3\cancel{y^2}}\right) = -\frac{1}{3}$$

iki kat limit yok! dolayısıyla limit yok!

Süreklilik:

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y) = f(a,b)$$ yani;

1) Fonksiyon (a,b) de limite sahip
2) Fonksiyon (a,b) de tanımlı
3) (a,b) deki limit $= f(a,b)$

} fonksiyon (a,b) de sürekli

* Bir fonksiyon tanım kümesinin her noktasında sürekli ise sürekli fonksiyondur.

Örnek:

$$f(x,y)=\begin{cases} \dfrac{x^3-xy^2}{x^2+y^2} & ,(x,y)\neq(0,0) \\ 0 & ,(x,y)=(0,0) \end{cases}$$

fonksiyonunun $(0,0)$ noktasında sürekli olduğunu gösteriniz.

Fonksiyonun sürekli olması için

$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0$ olduğunu göstermeliyiz.

Her $\varepsilon > 0$ sayısı için $\sqrt{x^2+y^2} < \delta$ iken

$\left| \frac{x^3 - xy^2}{x^2+y^2} - 0 \right| < \varepsilon$ olacak şekilde

$\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ sayısı var mıdır?

$$\left| \frac{x^3 - xy^2}{x^2+y^2} \right| = \frac{|x|\,|x^2-y^2|}{x^2+y^2} < \frac{|x|\,\cancel{(x^2+y^2)}}{\cancel{(x^2+y^2)}}$$

$$= |x| = \sqrt{x^2} \leq \sqrt{x^2+y^2} < \delta = \varepsilon$$

$\delta = \varepsilon > 0$ sayısı bulunabildiğinden limit 0'dır.

Dolayısıyla fonksiyon süreklidir.

Örnek:

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{\sin(xy)}{x^2+y^2}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

fonksiyonunun $(0,0)$ daki sürekliliğini inceleyiniz ve nedenini açıklayınız.

Fonksiyon (0,0) da tanımlıdır.

$y = mx$ boyunca limit alalım:

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin(mx^2)}{x^2 + m^2x^2} = \lim_{x \to 0} m.\underbrace{\frac{\sin(mx^2)}{m.x^2}}_{1} \cdot \frac{1}{(1+m^2)}$$

$$= \frac{m}{1+m^2}$$

Sonuç m'ye bağlı olduğundan limit mevcut değil.

$f(x,y)$ nin (0,0) da limiti mevcut olmadığından fonksiyon (0,0) da sürekli değildir.