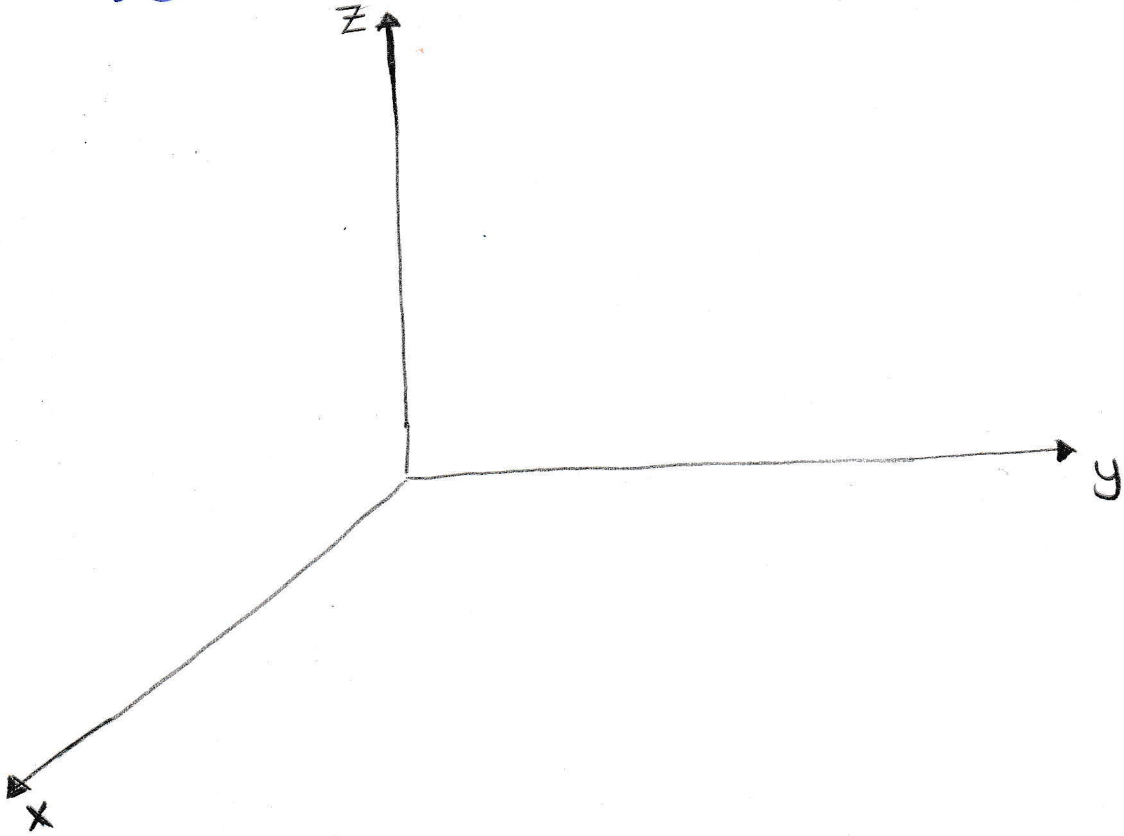
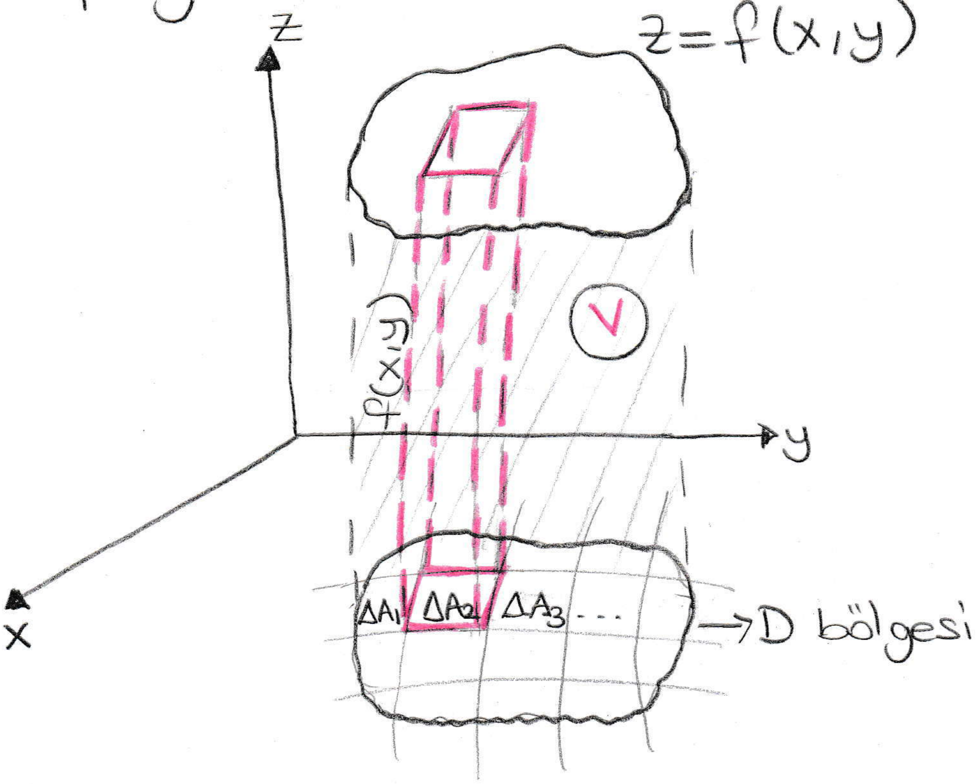
~ İKİ KATLI İNTEGRALLER ~



$z = f(x,y)$ yüzeyinin altında, xy düzlemindeki bir D bölgesinin üstünde kalan hacmi hesaplayalım.

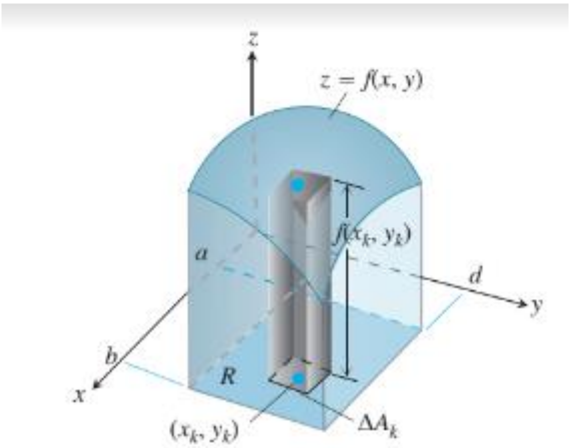


D bölgesini n tane alt bölgelere ayıralım. Bu bölgelerin her birinin alanı ΔA_i olsun.

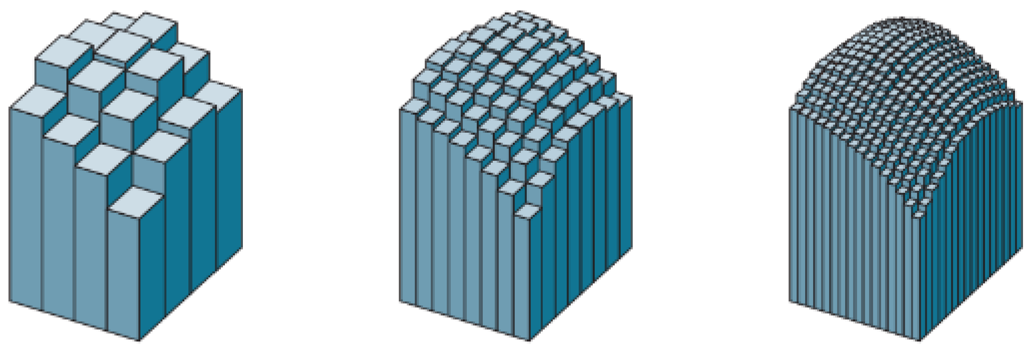
D bölgesi

taban alanı ← ΔA_1	ΔA_2	. . .	ΔA_n
(x_1, y_1)	(x_2, y_2)	. . .	(x_n, y_n)
yükseklik ← $f(x_1, y_1)$	$f(x_2, y_2)$	. . .	$f(x_n, y_n)$
Hacim ← $\Delta A_1 \cdot f(x_1, y_1)$	$\Delta A_2 \cdot f(x_2, y_2)$	. . .	$\Delta A_n \cdot f(x_n, y_n)$

Dikdörtgen prizmasının Hacmi = Taban Alanı X Yükseklik



ŞEKİL 15.2 Katı cisimlere dikdörtgensel kutularla yaklaşımda bulunmak, daha genel katı cisimlerin hacimlerini iki katlı integraller olarak tanımlamamızı sağlar. Burada gösterilen katı cismin hacmi $f(x, y)$'nin R bölgesi üzerinde iki katlı integralidir.

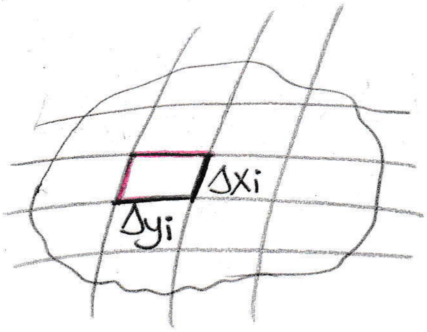


(a) $n = 16$ (b) $n = 64$ (c) $n = 256$

ŞEKİL 15.3 n artarken Riemann toplamı yaklaşımları, Şekil 15.2'de gösterilen katı cismin toplam hacmine yaklaşır.

$$\Delta A_1 \cdot f(x_1,y_1) + \cdots + \Delta A_n \cdot f(x_n,y_n) = \sum_{i=1}^{n} \Delta A_i \, f(x_i,y_i)$$

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i,y_i)\,\Delta A_i = \iint_D f(x,y)\,dA = V$$ $\rightarrow$ iki katlı integral



$$\Delta A_i = \Delta x_i \cdot \Delta y_i$$

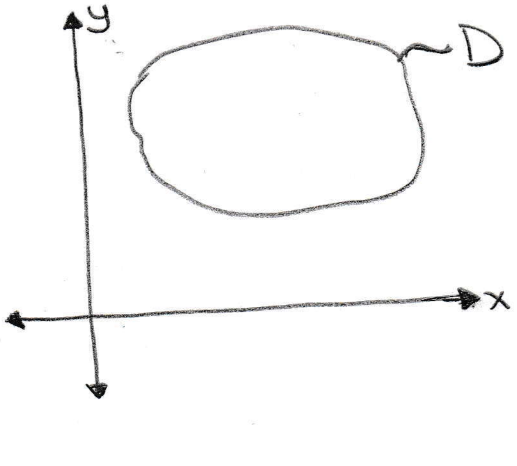
$$\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i,y_i)\,\Delta x_i\,\Delta y_i = \iint_D f(x,y)\,dx\,dy$$ $\rightarrow$ Ardışık integral

$D \rightarrow$ integrasyon bölgesi

$$\iint_D f(x,y)\,dx\,dy$$

$\rightarrow f(x,y)$ nin altında D nin üstünde kalan hacim

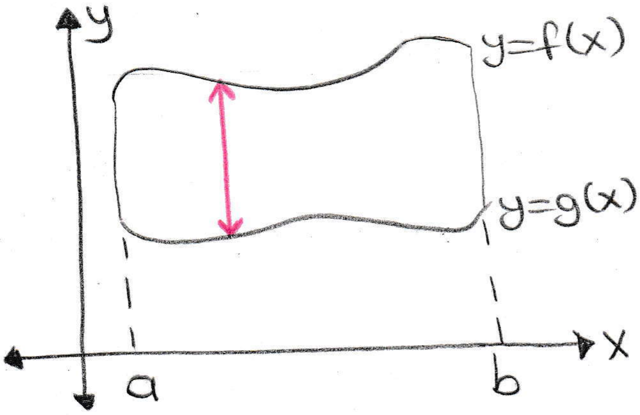
$\rightarrow z=f(x,y)$ nin D bölgesindeki iki katlı integrali



$$\iint_D f(x,y)\,\begin{matrix} dx\,dy \\ dy\,dx \end{matrix} \rightarrow \text{Düzgün bölge}$$

D bölgesini eksenlere dik doğruyla en fazla 2 kez kesiyorsak böyle bölgeye düzgün bölge denir.

* x'e göre düzgün bölgede çalışırken :



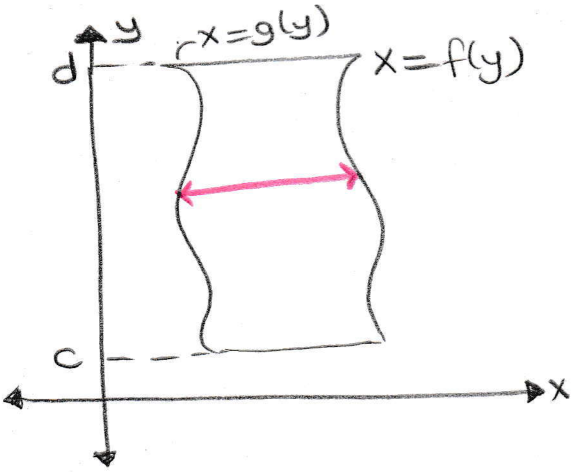
- Bölge x'e dik doğrularla taranır. ↕
- dydx sıralaması ile integral alınır.

$$\int_{x=a}^{x=b}\int_{y=g(x)}^{y=f(x)} f(x,y)\,dy\,dx = \text{sayı}$$

x sbt, y'ye göre int.

x'e göre int.

* y'ye göre düzgün bölgede çalışırken



- Bölge y'ye dik doğrularla taranır. ↔
- dxdy sıralaması ile integral alınır.

$$\int_{y=c}^{y=d}\int_{x=g(y)}^{x=f(y)} f(x,y)\,dx\,dy$$

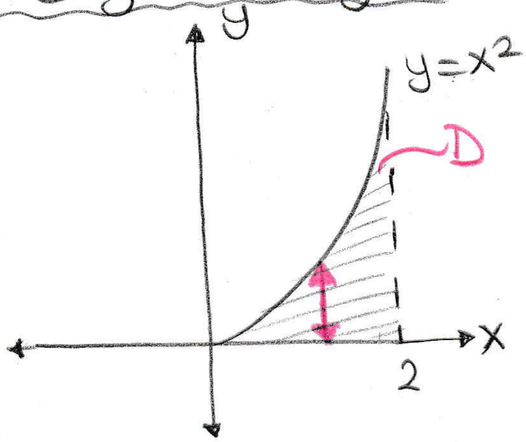
y sbt, x'e göre int.

y'ye göre int.

Örnek:

$$D: \begin{array}{l} x=0 \\ y=0 \\ x=2 \\ y=x^2 \end{array} \quad \text{ise} \quad \iint_D y\,dx\,dy = ?$$

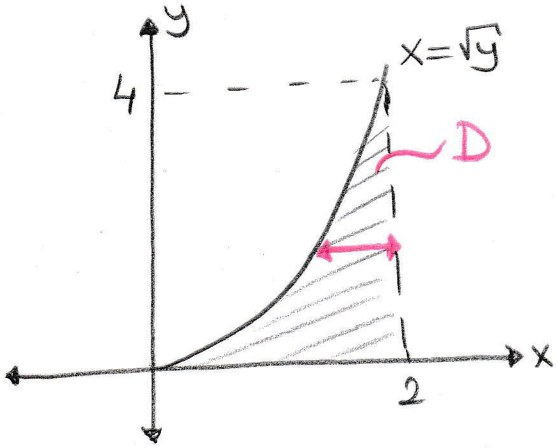
x 'e göre düzgün:



$$\int_{x=0}^{x=2}\int_{y=0}^{y=x^2} y\,dy\,dx = \int_0^2 \left(\frac{y^2}{2}\Big|_0^{x^2}\right)dx = \int_0^2 \frac{x^4}{2}\,dx = \frac{x^5}{10}\Big|_0^2$$

$$= \frac{32}{10} \;//$$

y 'ye göre düzgün:



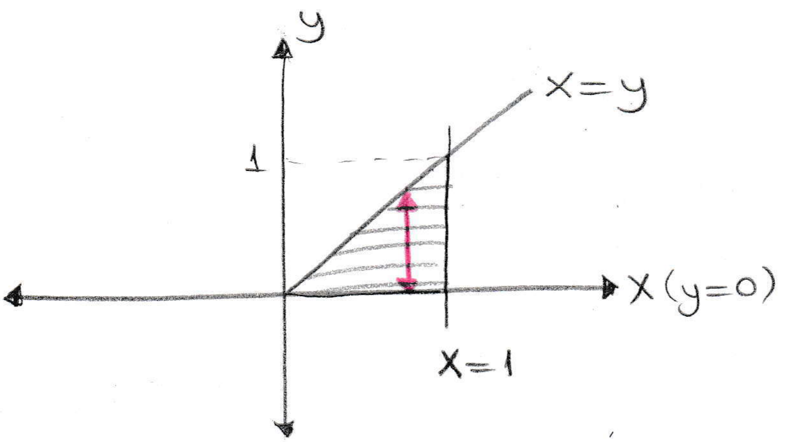
$$\int_{y=0}^{y=4}\int_{x=\sqrt{y}}^{x=2} y\,dx\,dy = \int_0^4 \left(yx\Big|_{\sqrt{y}}^{2}\right)dy = \int_0^4 (2y - y\sqrt{y})\,dy$$

$$= \int_0^4 (2y - y^{3/2})\,dy = y^2 - \frac{2}{5}y^{5/2}\Big|_0^4 = 16 - \frac{64}{5} = \frac{32}{10} \;//$$

Örnek! $I = \int_0^1 \int_y^1 \sin x^2 \, dx \, dy = ?$

Bu haliyle integral çözülemez!
integrasyon sırasını değiştirmem gerekir.

$D: \quad y=0 \qquad x=y$
$\qquad y=1 \qquad x=1$



$$I = \int_{x=0}^{x=1} \int_{y=0}^{y=x} \sin x^2 \, dy \, dx$$

$$= \int_0^1 y \cdot \sin x^2 \Big|_0^x dx = \int_0^1 x \sin x^2 \, dx$$

$x^2 = u \qquad x=0 \Rightarrow u=0$
$x\,dx = \frac{du}{2} \qquad x=1 \Rightarrow u=1$

$$= \int_0^1 \frac{1}{2} \sin u \, du = -\frac{1}{2} \cos u \Big|_0^1$$

$$= -\frac{1}{2} (\cos 1 - \cos 0)$$

$$= -\frac{1}{2} (\cos 1 - 1) \quad //$$

Örnek!

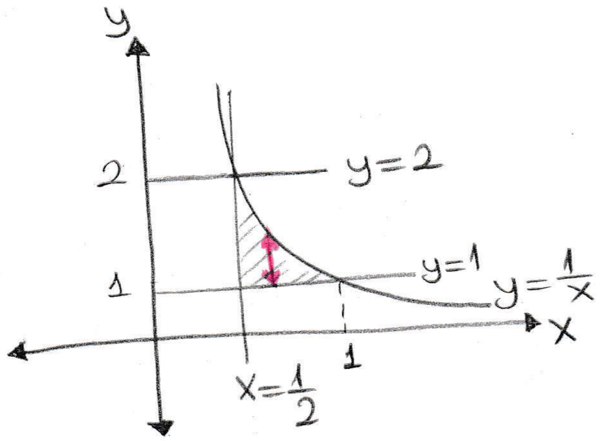
$$I=\int_{1}^{2}\int_{1/2}^{1/y} e^{\ln x - x}\,dx\,dy = ?$$

İntegral bu haliyle çözülemez!

İntegrasyon sırasını değiştirmem gerekir.

D: $y=1$ $\quad x=1/2$

$\quad y=2$ $\quad x=1/y$



$$I=\int_{x=\frac{1}{2}}^{x=1}\int_{y=1}^{y=\frac{1}{x}} e^{\ln x - x}\,dy\,dx = \int_{1/2}^{1} y e^{\ln x - x}\Big|_{1}^{1/x} dx$$

$$=\int_{1/2}^{1}\left(\frac{1}{x}-1\right) e^{\ln x - x}\,dx \qquad \left[\begin{array}{l}\ln x - x = u \\ \left(\frac{1}{x}-1\right)dx = du\end{array}\right]$$

$$= e^{\ln x - x}\Big|_{1/2}^{1} = e^{-1} - e^{\ln\frac{1}{2}-\frac{1}{2}} = \frac{1}{e} - e^{\ln\frac{1}{2}}.e^{-\frac{1}{2}}$$

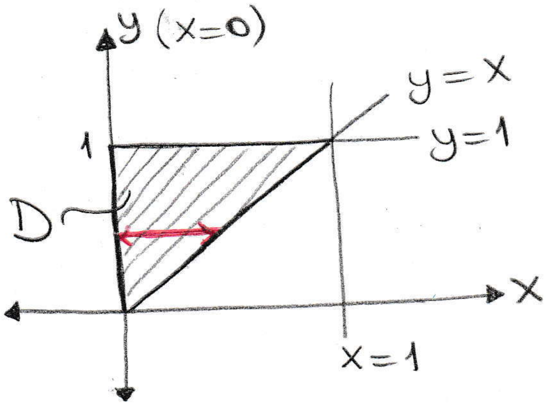
$$= \frac{1}{e} - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{e}} = \frac{1}{e} - \frac{1}{2\sqrt{e}} \;//$$

Örnek!

$$I=\int_0^1\int_x^1 e^{x/y}\,dy\,dx=?$$

Bu haliyle integral alınamaz. Sırasını değiştirmeliyim.

D: $x=0$, $y=x$
$x=1$, $y=1$



y'ye göre düzgün bölge alalım.

$$I=\int_{y=0}^{y=1}\int_{x=0}^{x=y} e^{x/y}\,dx\,dy=\int_{y=0}^{y=1}\left(\int_{x=0}^{x=y}\frac{1}{y}\cdot\frac{e^{x/y}}{1/y}\,dx\right)dy$$

$$I=\int_0^1 y.e^{x/y}\Big|_0^y\,dy=\int_0^1 y(e^1-e^0)\,dy$$

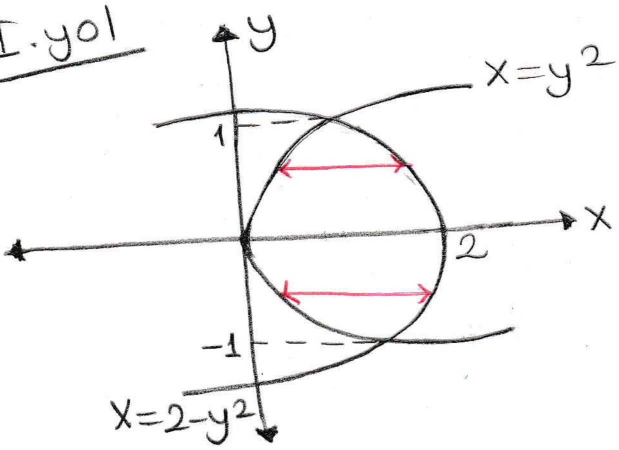
$$=\int_0^1 y(e-1)\,dy=(e-1).\frac{y^2}{2}\Big|_0^1$$

$$=\frac{e-1}{2}$$ //

Örnek: $D : \begin{cases} x = y^2 \\ x = 2 - y^2 \end{cases}$ bölgesinde

$f(x,y) = 1 + 5y$ fonksiyonunun integralini hesaplayın.

I. yol



$$\left.\begin{aligned} x &= y^2 \\ x &= 2 - y^2 \end{aligned}\right] \quad \begin{aligned} y^2 &= 2 - y^2 \\ 2y^2 &= 2 \\ y^2 &= 1 \\ y &= \pm 1 \end{aligned}$$

y'ye göre düzgün bölge seçelim.

$$I = \int_{y=-1}^{y=1} \int_{x=y^2}^{x=2-y^2} (1+5y)\, dx\, dy = \int_{-1}^{1} (1+5y)\, x \Big|_{y^2}^{2-y^2} dy$$

$$= \int_{-1}^{1} (1+5y)(2 - y^2 - y^2)\, dy$$

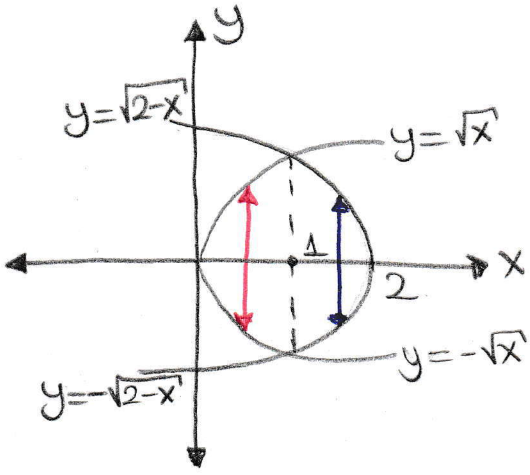
$$= \int_{-1}^{1} (2 - 2y^2 + 10y - 10y^3)\, dy$$

$$= 2y - \frac{2}{3}y^3 + 5y^2 - \frac{5}{2}y^4 \Big|_{-1}^{1}$$

$$= 2 - \frac{2}{3} + \cancel{5} - \cancel{\frac{5}{2}} + 2 - \frac{2}{3} - \cancel{5} + \cancel{\frac{5}{2}}$$

$$= 4 - \frac{4}{3} = \frac{8}{3} \,//$$

II. yol x'e göre düzgün bölge seçelim.



Bölgeyi ikiye bölmeliyiz.

$x=2-y^2 \Rightarrow y=\pm\sqrt{2-x}$

$x=y^2 \Rightarrow y=\pm\sqrt{x}$

$$I=\int_{x=0}^{x=1}\int_{y=-\sqrt{x}}^{y=\sqrt{x}}(1+5y)\,dy\,dx+\int_{x=1}^{x=2}\int_{y=-\sqrt{2-x}}^{y=\sqrt{2-x}}(1+5y)\,dy\,dx$$

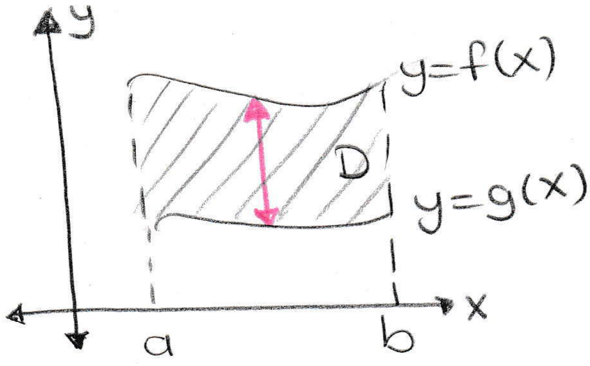
$$I=\int_0^1\left(y+\frac{5}{2}y^2\right)\Big|_{-\sqrt{x}}^{\sqrt{x}}dx+\int_1^2\left(y+\frac{5}{2}y^2\right)\Big|_{-\sqrt{2-x}}^{\sqrt{2-x}}dx$$

$$=\int_0^1\left(\sqrt{x}+\cancel{\frac{5}{2}x}+\sqrt{x}-\cancel{\frac{5}{2}x}\right)dx+\int_1^2\left[\sqrt{2-x}+\cancel{\frac{5}{2}(2-x)}+\sqrt{2-x}-\cancel{\frac{5}{2}(2-x)}\right]dx$$

$$=\int_0^1 2\sqrt{x}\,dx+\int_1^2 2\sqrt{2-x}\,dx=2\cdot\frac{2}{3}x^{3/2}\Big|_0^1-2\cdot\frac{2}{3}(2-x)^{3/2}\Big|_1^2$$

$$=\frac{4}{3}-\frac{4}{3}(0-1)=\frac{4}{3}+\frac{4}{3}=\frac{8}{3}\ //$$

İki Katlı İntegral ile Alan Hesabı :



$$\text{Alan} = \int_a^b [f(x)-g(x)]\,dx = \int_a^b \int_{g(x)}^{f(x)} 1.\,dy\,dx$$

* Eğer, $\iint_D f(x,y)\,dxdy$ integralinde $f(x,y)=1$ ise

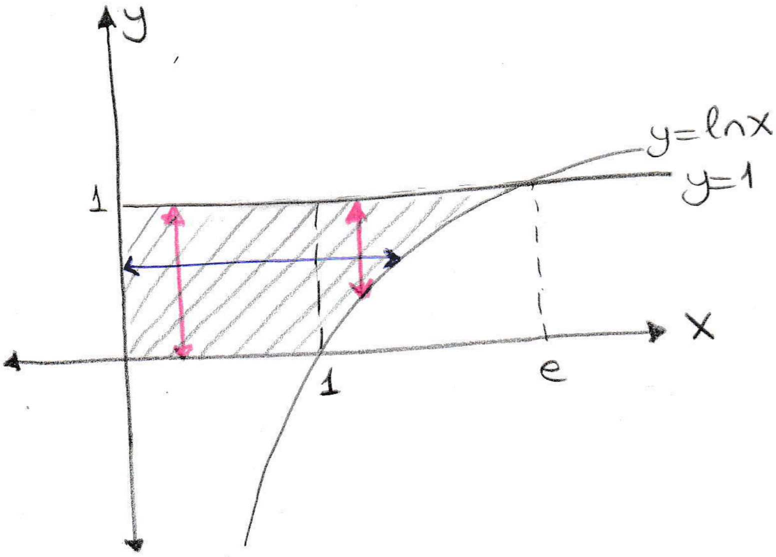
$\iint_D dxdy$ D nin alanıdır.

$$\boxed{\text{Alan} = \iint_D dxdy}$$

Örnek: $y=\ln x$, $y=1$, $x=0$, $y=0$ eğrilerinin sınırladığı alanı veren iki katlı integrali,

a) x'e göre düzgün,

b) y'ye göre düzgün bölge olarak bulun.



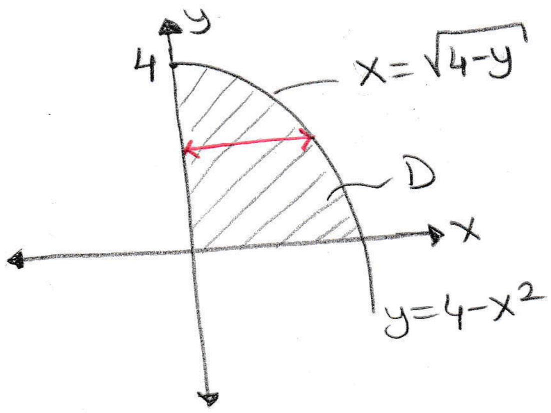
a) $$A=\int_{x=0}^{x=1}\int_{y=0}^{y=1} dy\,dx+\int_{x=1}^{x=e}\int_{y=\ln x}^{y=1} dy\,dx$$

b) $$A=\int_{y=0}^{y=1}\int_{x=0}^{x=e^y} dx\,dy$$

Örnek :

D: 1. bölgede $y=4-x^2$, $x=0$, $y=0$ arasında kalan bölge ise $\iint_D \frac{xe^{2y}}{4-y}\,dA = ?$

$dA=dydx$ yazarsak integralin çözümü imkansız olur. Bu yüzden $dA=dxdy$ olmalı yani y'ye göre düzgün bölge seçmeliyim.



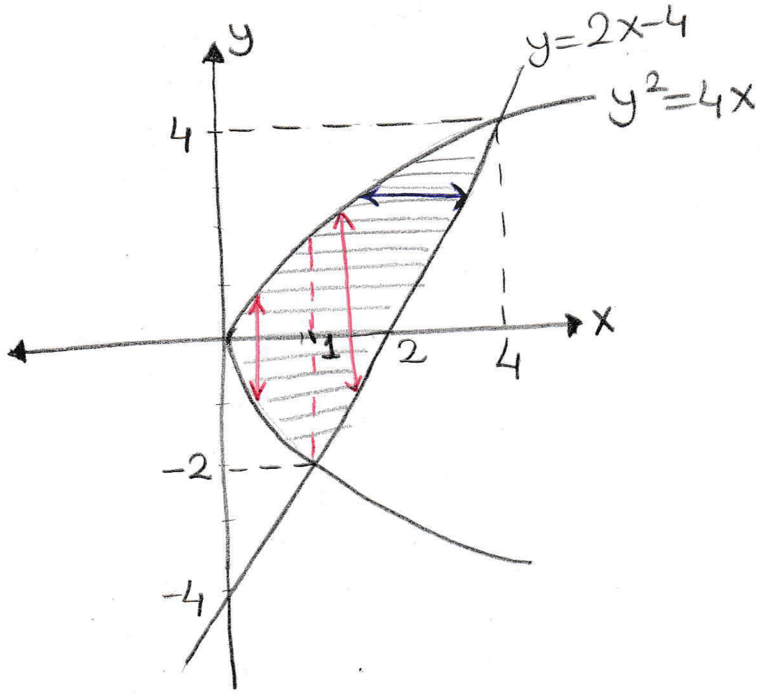
$$y=4-x^2 \Rightarrow x^2=4-y$$
$$x=\pm\sqrt{4-y}$$

$$I=\int_{y=0}^{y=4}\int_{x=0}^{x=\sqrt{4-y}} x\cdot\frac{e^{2y}}{4-y}\,dx\,dy$$

$$=\int_0^4 \left.\frac{x^2}{2}\right|_0^{\sqrt{4-y}}\cdot\frac{e^{2y}}{4-y}\,dy=\int_0^4 \frac{1}{2}\cancel{(4-y)}\cdot\frac{e^{2y}}{\cancel{(4-y)}}\,dy$$

$$=\int_0^4 \frac{1}{2}e^{2y}\,dy=\frac{1}{4}e^{2y}\Big|_0^4=\frac{1}{4}(e^8-1)\ //$$

Örnek: $y^2=4x$, $y=2x-4$ arasında kalan alanı veren iki katlı integrali yazınız.



$y^2=4x \Rightarrow y=\pm 2\sqrt{x}$

1. yol y'ye göre düzgün

$$A=\int_{y=-2}^{y=4}\int_{x=\frac{y^2}{4}}^{x=\frac{y+4}{2}} 1 .\, dx\, dy$$

2. yol x'e göre düzgün Bölgeyi ikiye bölmeliyim.

$$A=\int_{x=0}^{x=1}\int_{y=-2\sqrt{x}}^{y=2\sqrt{x}} 1 .\, dy\, dx + \int_{x=1}^{x=4}\int_{y=2x-4}^{y=2\sqrt{x}} 1 .\, dy\, dx$$

Kutupsal Koordinatlarda İki Katlı İntegral

$\iint_D f(x,y)\,dx\,dy$ integralini,

$\left.\begin{array}{l} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{array}\right]$ dönüşümleri ile

$\left.\begin{array}{ll} r = f_1(\theta), & r = f_2(\theta) \\ \theta = \alpha, & \theta = \beta \end{array}\right]$ bölgesine dönüştürürüz.

Ayrıca ; $dx\,dy = dy\,dx = \boxed{r\,dr\,d\theta}$ ya dönüşür.

Dolayısıyla ;

$$\int_{\theta=\alpha}^{\theta=\beta} \int_{r=f_1(\theta)}^{r=f_2(\theta)} f(r\cos\theta, r\sin\theta)\, r\,dr\,d\theta$$

integraline dönüşür.

* İpucu : D bölgesini sınırlayan eğrilerden biri çember ise kutupsal dönüşüm tercih edilmelidir.

Örnek:

$$I=\int_0^1\int_0^{\sqrt{1-x^2}} e^{x^2+y^2}\,dy\,dx=?$$

Bu integral dxdy veya dydx sıralaması farketmeksizin kartezyen koordinatlarda çözülemez. Kutupsal koordinatlara geçmemiz gerekir.

$$\left.\begin{aligned} x&=r\cos\theta \\ y&=r\sin\theta \end{aligned}\right] \quad x^2+y^2=r^2$$

$$dx\,dy=r\,dr\,d\theta$$

D bölgesi

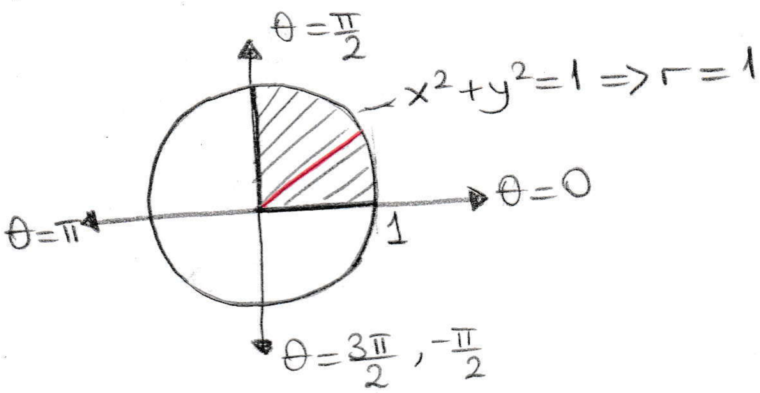
Kartezyen

$x=0 \quad y=0$

$x=1 \quad y=\sqrt{1-x^2}$

Kutupsal

$\longrightarrow x^2+y^2=1 \Rightarrow \underline{r=1}$



$$I=\int_{\theta=0}^{\theta=\frac{\pi}{2}}\int_{r=0}^{r=1} e^{r^2}\,r\,dr\,d\theta=\int_0^{\pi/2}\frac{1}{2}e^{r^2}\Big|_0^1\,d\theta$$

$$=\int_0^{\pi/2}\frac{1}{2}(e-1)\,d\theta=\frac{1}{2}(e-1)\,\theta\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$=\frac{\pi}{4}(e-1)$$

İki Katlı İntegralde Hacim Hesabı :

1) $f(x,y)$ bir D bölgesi üzerinde pozitif fonksiyon olsun. Bu durumda üstten $z=f(x,y)$, alttan $z=0$ ile sınırlı cismin D bölgesi üzerinde oluşturduğu cismin hacmi :

$$\boxed{V=\iint_D f(x,y)\,dy\,dx}$$

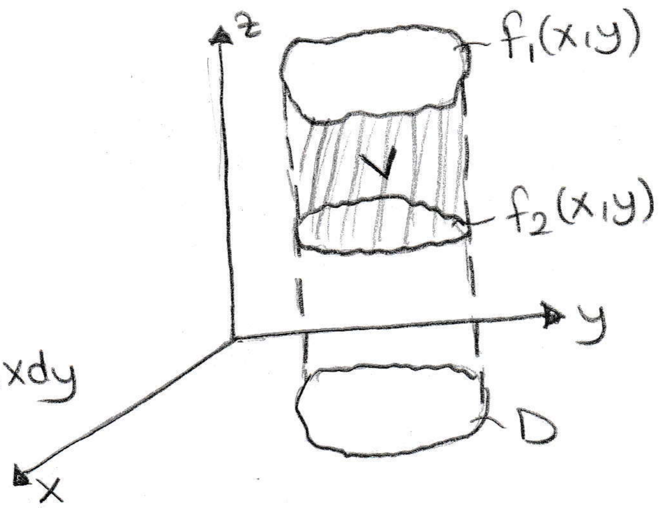
2) Eğer cisim, üstten $z=f_1(x,y)$, alttan $z=f_2(x,y)$ yüzeyleri ile sınırlı ise ; bu yüzeylerin xy-düzlemi üzerindeki izdüşümü D bölgesi ise oluşan hacim :

$$\boxed{V=\iint_D \left[f_1(x,y)-f_2(x,y)\right] dx\,dy}$$

$V=V_1-V_2$

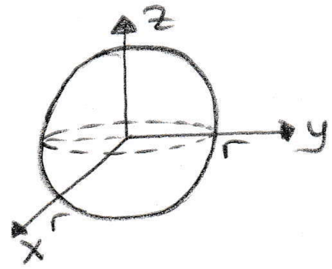
$V_1=\iint_D f_1(x,y)\,dx\,dy$

$V_2=\iint_D f_2(x,y)\,dx\,dy$

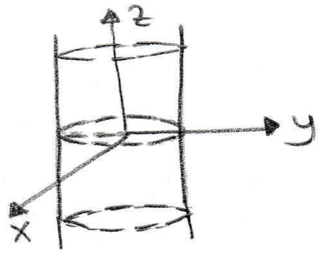


Hatırlatma :

Küre : $x^2+y^2+z^2=r^2$

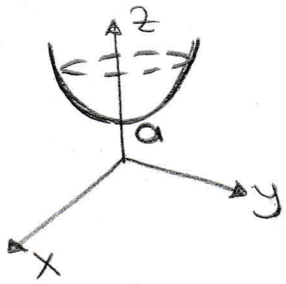


Silindir : $x^2+y^2=r^2$

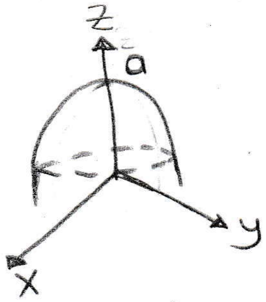


Paraboloid : $z=a+x^2+y^2$ --- (1)

$z=a-x^2-y^2$ --- (2)

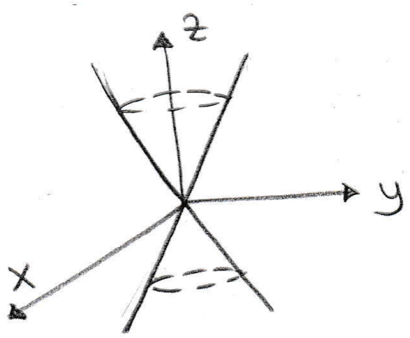


(1)



(2)

Koni : $z^2=x^2+y^2$



Düzlem : $ax+by+cz=d$

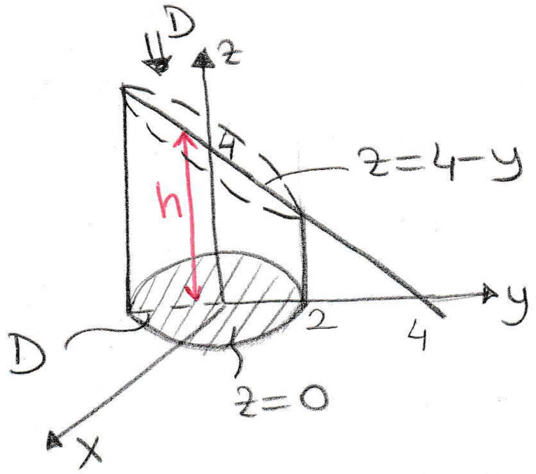
Örnek

$\left.\begin{array}{l} x^2+y^2=4 \\ z=0 \\ y+z=4 \end{array}\right\}$ tarafından sınırlanan cismin hacmini bulunuz.

$x^2+y^2=4 \rightarrow z$ boyunca uzanan silindir

$z=0 \rightarrow$ düzlem (xy-düzlemi)

$y+z=4 \rightarrow$ düzlem

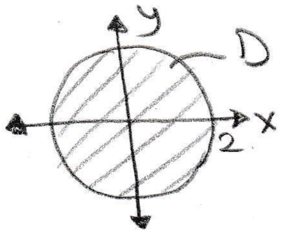


$$V=\iint_D (z_1-z_2)\,dx\,dy$$

$$V=\iint (\underbrace{4-y-0}_{h\,(\text{yükseklik})})\,\underbrace{dx\,dy}_{\text{taban alanı}}$$

D → izdüşüm bölgesi

izdüşüm bölgesi bir çemberdir. Kutupsal koordinatlara geçelim.



$D: x^2+y^2=4$

$x=r\cos\theta$
$y=r\sin\theta$
$dx\,dy=r\,dr\,d\theta$

$$V=\int_0^{2\pi}\int_0^{2}(4-r\sin\theta)\,r\,dr\,d\theta=\int_0^{2\pi}\left(2r^2-\frac{r^3}{3}\sin\theta\right)\Big|_0^2 d\theta$$

$$V=\int_0^{2\pi}\left(8-\frac{8}{3}\sin\theta\right)d\theta = 8\theta+\frac{8}{3}\cos\theta\Big|_0^{2\pi}$$

$$=16\pi+\frac{8}{3}-\frac{8}{3}=16\pi \text{ br}^3 \;//$$

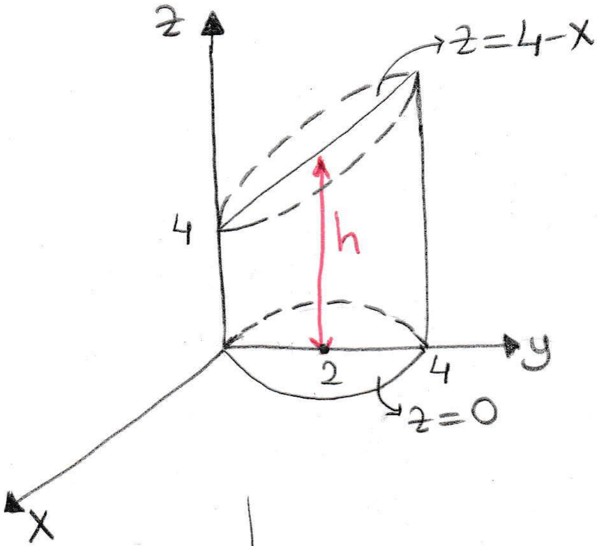
Örnek: $\left.\begin{array}{l} x^2+y^2-4y=0 \\ x+z=4 \\ z=0 \end{array}\right\}$ arasındaki cismin hacmini veren integrali bulunuz.

$x^2+y^2-4y=0 \Rightarrow x^2+(y-2)^2=4 \rightarrow$ ötelenmiş silindir.

Silindirin tabanı : merkezi $(0,2)$ olan bir çember

$x+z=4 \rightarrow$ düzlem

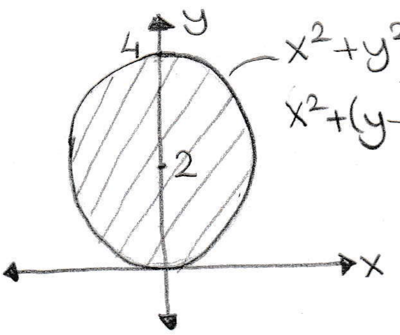
$z=0 \rightarrow$ düzlem (xy düzlemi)



$$V=\iint_D \underbrace{(4-x)}_{h\text{(yükseklik)}}\,dx\,dy$$

D → izdüşüm bölgesi

↓ D $\xrightarrow{\text{Kutupsal}}$

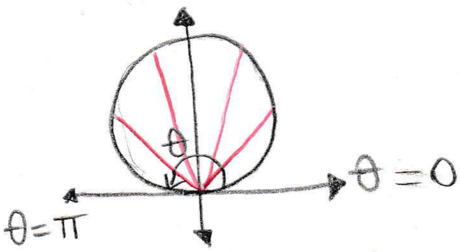


$x^2+y^2-4y=0$

$x^2+(y-2)^2=4$

$\longrightarrow r^2-4r\sin\theta=0$

$r=4\sin\theta$



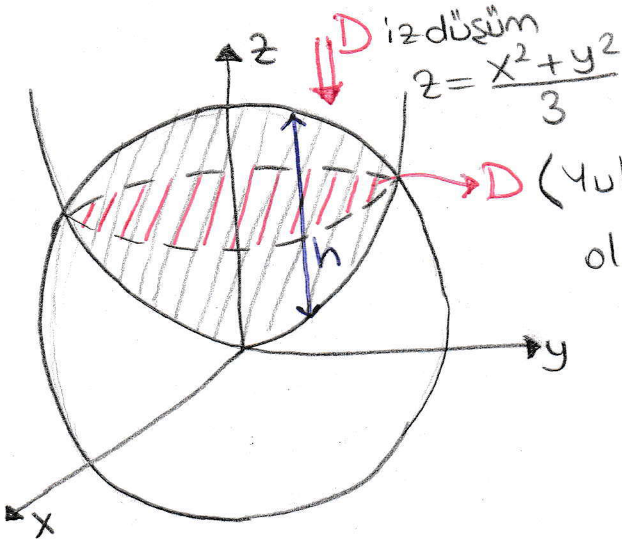
$$V=\int_{\theta=0}^{\theta=\pi}\int_{r=0}^{r=4\sin\theta}(4-r\cos\theta)\,r\,dr\,d\theta$$

//

Örnek: $x^2+y^2+z^2=4$ ün altında $3z=x^2+y^2$ nin üzerinde kalan cismin hacmini bulunuz.

$x^2+y^2+z^2=4 \rightarrow$ küre

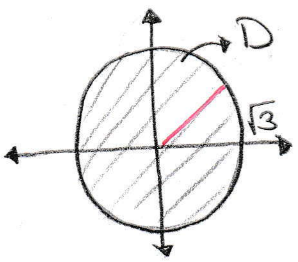
$3z=x^2+y^2 \rightarrow$ paraboloid



D (Yukarıdan bakıldığında kesişimleri olan en büyük çember görülür.)

$$\left.\begin{aligned} x^2+y^2+z^2&=4 \\ 3z&=x^2+y^2 \end{aligned}\right] \quad z^2+3z-4=0 \quad \begin{matrix} +4 \\ -1 \end{matrix} \quad \boxed{z=1} \quad \cancel{z=-4}$$

$z=1 \Rightarrow x^2+y^2=3 \rightarrow D$



$x=r\cos\theta$

$y=r\sin\theta$

$dx\,dy=r\,dr\,d\theta$

$$V=\iint_D \left(\sqrt{4-x^2-y^2}-\frac{(x^2+y^2)}{3}\right)dx\,dy$$

$$V=\int_0^{2\pi}\int_0^{\sqrt{3}}\left(\sqrt{4-r^2}-\frac{r^2}{3}\right)r\,dr\,d\theta$$

$$V=\int_0^{2\pi}\int_0^{\sqrt{3}}\left(r\sqrt{4-r^2}-\frac{r^3}{3}\right)dr\,d\theta$$

$$V=\int_0^{2\pi}\left(-\frac{1}{\cancel{2}}\cdot\frac{\cancel{2}}{3}(4-r^2)^{3/2}-\frac{r^4}{12}\right)\Bigg|_0^{\sqrt{3}}d\theta=\int_0^{2\pi}\left(-\frac{1}{3}\cdot 1-\frac{9}{12}+\frac{8}{3}\right)d\theta$$

$$=\int_0^{2\pi}\frac{19}{12}\,d\theta=\frac{19}{12}\theta\Big|_0^{2\pi}=\frac{19}{12}\cdot 2\pi=\frac{19}{6}\pi\ br^3 \ //$$