Maksimum - Minimum Değerler :

Ekstremum Değerler : $f(x,y)$ bir $D \subset \mathbb{R}^2$ de tanımlı bir fonksiyon, $(a,b) \in D$ olsun. Eğer (a,b) nin uygun bir komşuluğundaki tüm (x,y) ler için;

$f(x,y) \leq f(a,b)$ ise $f(x,y)$, (a,b) de yerel maksimuma

$f(x,y) \geq f(a,b)$ " " " " " minimuma

sahiptir.

Eğer $f(x,y)$ bir noktada yerel maksimum veya yerel minimuma sahip ise $f(x,y)$ nin o noktada bir ekstremuma sahip olduğunu söyleriz.

Teorem; Bir $f(x,y)$ fonksiyonu tanım kümesindeki bir (a,b) noktasında aşağıdakilerden birini sağlıyorsa (a,b) bir kritik noktadır:

a) $f_x(a,b) = 0$ ve $f_y(a,b) = 0$

b) $f_x(a,b)$ veya $f_y(a,b)$ mevcut değildir.

* **Eyer (Semer) Noktası:** Kritik nokta olan ancak maksimum / minimum olmayan noktaya "eyer noktası" denir.

$$\text{Kritik nokta} \begin{cases} \to \text{maksimum} \\ \to \text{minimum} \\ \to \text{eyer noktası} \end{cases}$$

Maksimum / minimum bulunması:

Bir (a,b) kritik noktası ve yeterince küçük her h, k sayıları için;

1) $f(a+h, b+k) - f(a,b) \geq 0 \Rightarrow (a,b)$ yerel minimum

2) $f(a+h, b+k) - f(a,b) \leq 0 \Rightarrow (a,b)$ yerel maksimum

olur.

Örnek: $f(x,y) = x^2 + y^2$ fonksiyonunun kritik noktalarını bulup sınıflandırınız.

$$\text{Kritik nokta} \begin{cases} \to f_x = 0,\ f_y = 0 \\ \to f_x \text{ veya } f_y \text{ tanımsız} \end{cases}$$

$$\left.\begin{array}{l} f_x = 2x \\ f_y = 2y \end{array}\right] f_x = f_y = 0 \Rightarrow (0,0) \to \text{kritik nokta}$$

(maks./min./eyer)

$f(0+h, 0+k) - f(0,0) = h^2 + k^2 \geq 0 \Rightarrow (0,0)$ yerel minimum

2. Türev Testi :

$f(x,y)$ nin bir $(a,b) \in D(f)$ noktasında bir kritik noktaya sahip olduğunu kabul edelim. $f(x,y)$ ile onun 1. ve 2. mertebe türevleri sürekli ve $f_x(a,b)=0$, $f_y(a,b)=0$ olsun.

$A=f_{xx}(a,b)$ $\quad$ $B=f_{xy}(a,b)=f_{yx}(a,b)$ $\quad$ $C=f_{yy}(a,b)$

olmak üzere ;

a) $B^2-AC<0$ ve $A>0$ ise, f, (a,b) de yerel min. sahip

b) $B^2-AC<0$ ve $A<0$ ise, f, (a,b) de yerel maks. sahip

c) $B^2-AC>0$ ise f, (a,b) de bir eyer noktasına sahip

d) $B^2-AC=0$ ise test sonuç vermez. f, (a,b) de bir maks., min. veya eyer noktasına sahip olabilir.

Örnek:

$f(x,y) = 2x^3 - 6xy + 3y^2$ fonksiyonunun kritik noktalarını bulup sınıflandırınız.

$f_x = 6x^2 - 6y = 0 \Rightarrow y = x^2$

$f_y = -6x + 6y = 0 \Rightarrow y = x$

$x^2 - x = 0$

$x(x-1) = 0$

$x = 0 \Rightarrow y = 0$ → $(0,0)$

$x = 1 \Rightarrow y = 1$ → $(1,1)$

$(0,0), (1,1)$ > KN

$f_{xx} = 12x = A$

$f_{xy} = -6 = f_{yx} = B$

$f_{yy} = 6 = C$

	$A=12x$	$B=-6$	$C=6$	B^2-AC
$(0,0)$	0	-6	6	$36>0 \Rightarrow$ Eyer noktası
$(1,1)$	12	-6	6	$36-72=-36<0$, $A=12>0$ } yerel minimum

$(0,0) \longrightarrow$ Eyer noktası

$(1,1) \longrightarrow$ Yerel minimum noktası

Örnek: $f(x,y) = x^3 - 3x^2 + 3xy^2 - 3y^2$

kritik noktalarını bulup sınıflandırınız.

$f_x = 3x^2 - 6x + 3y^2 = 0 \Rightarrow x^2 - 2x + y^2 = 0$

$f_y = 6xy - 6y = 0 \Rightarrow (x-1)y = 0 \Rightarrow \underline{x=1}$ veya $\underline{y=0}$

$x = 1 \Rightarrow 1^2 - 2.1 + y^2 = 0 \Rightarrow y^2 = 1 \Rightarrow \underline{y = \pm 1}$

$y = 0 \Rightarrow x^2 - 2x + 0 = 0 \Rightarrow x(x-2) = 0 \Rightarrow \underline{x=0}, \underline{x=2}$

$(1,1), (1,-1), (0,0), (2,0)$

$f_{xx} = 6x - 6 = A$

$f_{xy} = f_{yx} = 6y = B$

$f_{yy} = 6x - 6 = C$

	$A = 6x-6$	$B = 6y$	$C = 6x-6$	$B^2 - AC$
$(0,0)$	-6	0	-6	$-36 < 0, A = -6 < 0$
$(1,1)$	0	6	0	$36 > 0$
$(1,-1)$	0	-6	0	$36 > 0$
$(2,0)$	6	0	6	$-36 < 0, A = 6 > 0$

$(0,0) \rightarrow$ yerel maksimum noktası

$(1,1) \rightarrow$ eyer noktası

$(1,-1) \rightarrow$ eyer noktası

$(2,0) \rightarrow$ yerel minimum noktası