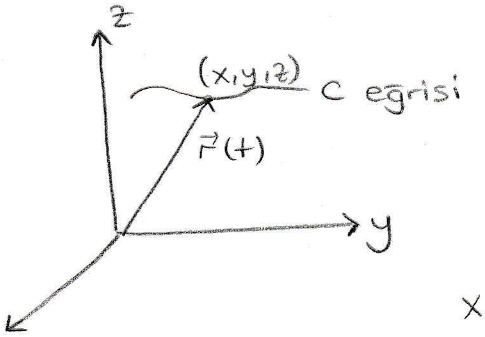
~ VEKTÖREL FONKSİYONLAR ~



3-boyutlu uzayda hareket eden bir parçacığın hareketi, onun pozisyonunun üç koordinatı t zamanının fonksiyonları ile verilerek tanımlanabilir.

$x(t)$, $y(t)$, $z(t)$

Bu durumda parçacığın t zamanındaki konum vektörü,

$$\vec{r}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k}$$

olur. Bu şekilde tanımlanmış $\vec{r}(t)$ fonksiyonuna "vektörel fonksiyon" denir. $t \in D$ $(D \subseteq \mathbb{R})$ olmak üzere D nin her elemanına bir vektör atar.

* Burada t artarken parçacık bir yol boyunca hareket eder, bu 3-boyutlu uzayda bir c-eğrisidir.

Türev: f, g, h fonksiyonları t de türevlenebilir ise,

$\vec{r}(t) = f(t)\vec{i} + g(t)\vec{j} + h(t)\vec{k}$ fonksiyonu t de türevlenebilirdir.

$$\boxed{\vec{r}\,'(t) = \frac{d\vec{r}}{dt} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\vec{r}(t+\Delta t) - \vec{r}(t)}{\Delta t} = \frac{df}{dt}\vec{i} + \frac{dg}{dt}\vec{j} + \frac{dh}{dt}\vec{k}}$$

* Eğer $\frac{d\vec{r}}{dt}$ sürekli ise ve asla sıfır olmuyorsa, yani; f, g, h fonksiyonlarının hepsi aynı anda sıfır olmayan 1. mertebe türevleri varsa, $\vec{r}$ tarafından gidilen eğri düzgündür.

* Eğer $\vec{r}$ uzayda düzgün bir eğri boyunca hareket eden bir parçacığın konum vektörü ise;

1) $\vec{v}(t) = \frac{d\vec{r}}{dt}$ parçacığın hız vektörüdür, ve eğriye teğettir.
2) $|\vec{v}|$ parçacığın süratidir.
3) $\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2}$ ivme vektörüdür.

4) $\vec{T} = \dfrac{\vec{v}}{|\vec{v}|}$ vektörü birim teğet vektörüdür. t zamanında hareketin yönüdür. $\left(\vec{v} = \dfrac{d\vec{r}}{dt} \right)$

$$\text{Hız} = (\text{Sürat}) \cdot (\text{Yön}) = |\vec{v}| \cdot \frac{\vec{v}}{|\vec{v}|} = \vec{v}$$

Örnek: $\vec{r}(t) = 3\cos t \, \vec{i} + 3\sin t \, \vec{j} + t^2 \vec{k}$ ise birim teğet vektörü bulunuz.

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = -3\sin t \, \vec{i} + 3\cos t \, \vec{j} + 2t \, \vec{k} \qquad \left| \frac{d\vec{r}}{dt} \right| = \sqrt{9\sin^2 t + 9\cos^2 t + 4t^2}$$
$$= \sqrt{9 + 4t^2}$$

$$\vec{T} = \frac{\dfrac{d\vec{r}}{dt}}{\left| \dfrac{d\vec{r}}{dt} \right|} = -\frac{3\sin t}{\sqrt{9+4t^2}} \vec{i} + \frac{3\cos t}{\sqrt{9+4t^2}} \vec{j} + \frac{2t}{\sqrt{9+4t^2}} \vec{k} \quad //$$

Limit ve Süreklilik

$\vec{r}(t) = f(t)\vec{i} + g(t)\vec{j} + h(t)\vec{k}$, D tanım bölgeli vektör-değerli bir fonksiyon ve $\vec{L} = L_1\vec{i} + L_2\vec{j} + L_3\vec{k}$ bir vektör olsun.

$$\lim_{t \to t_0} \vec{r}(t) = \vec{L} \Rightarrow \begin{cases} \lim\limits_{t \to t_0} f(t) = L_1 \\ \lim\limits_{t \to t_0} g(t) = L_2 \\ \lim\limits_{t \to t_0} h(t) = L_3 \end{cases}$$

$$\boxed{\lim_{t \to t_0} \vec{r}(t) = \left(\lim_{t \to t_0} f(t) \right) \vec{i} + \left(\lim_{t \to t_0} g(t) \right) \vec{j} + \left(\lim_{t \to t_0} h(t) \right) \vec{k}}$$

* $\lim\limits_{t \to t_0} \vec{r}(t) = \vec{r}(t_0)$ ise $\vec{r}(t)$, $t_0 \in D$ noktasında süreklidir.

Örnek: $\vec{r}(t) = \cos t\,\vec{i} + \sin t\,\vec{j} + t\vec{k} \Rightarrow \lim\limits_{t\to\frac{\pi}{4}} \vec{r}(t) = ?$

$$\lim_{t\to\frac{\pi}{4}} \vec{r}(t) = \left(\lim_{t\to\frac{\pi}{4}} \cos t\right)\vec{i} + \left(\lim_{t\to\frac{\pi}{4}} \sin t\right)\vec{j} + \left(\lim_{t\to\frac{\pi}{4}} t\right)\vec{k} = \frac{\sqrt{2}}{2}\vec{i} + \frac{\sqrt{2}}{2}\vec{j} + \frac{\pi}{4}\vec{k}$$

Örnek: $\vec{r}(t) = t\vec{i} + t^2\vec{j} + t^3\vec{k}$ konum vektörü ile verilen cismin $t=1$ deki hız ve ivme vektörlerini bulunuz.

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{i} + 2t\vec{j} + 3t^2\vec{k} \qquad \vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = 2\vec{j} + 6t\vec{k}$$

$t=1$ için; $\vec{v} = \vec{i} + 2\vec{j} + 3\vec{k}$, $\vec{a} = 2\vec{j} + 6\vec{k}$

Örnek: Konum vektörü $\vec{r}(t) = \cos t\,\vec{i} + \sin t\,\vec{j} + t^2\vec{k}$ olan cismin $t=1$ deki süratini ve ivmesini bulunuz.

$$\vec{v}(t) = \frac{d\vec{r}}{dt} = -\sin t\,\vec{i} + \cos t\,\vec{j} + 2t\vec{k} \Rightarrow \vec{v}(1) = -\sin 1\,\vec{i} + \cos 1\,\vec{j} + 2\vec{k}$$

$$\vec{a}(t) = \frac{d\vec{v}}{dt} = -\cos t\,\vec{i} - \sin t\,\vec{j} + 2\vec{k} \Rightarrow \vec{a}(1) = -\cos 1\,\vec{i} - \sin 1\,\vec{j} + 2\vec{k}$$

$$\text{sürat} = |\vec{v}| = \sqrt{\sin^2 1 + \cos^2 1 + 2^2} = \sqrt{5} \;//$$

Yay Uzunluğu !

Bir $\vec{r}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k}$ $a \le t \le b$ eğrisinin uzunluğu

$$\boxed{S = \int_a^b \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2}\, dt}$$

$\vec{r}(t)$'yi bir parçacığın konum vektörü olarak düşünürsek,

$$S = \int_a^b |\vec{v}(t)|\, dt \quad \text{olur.}$$

Örnek! $\vec{r}(t) = t\vec{i} + \cos t\,\vec{j} + \sin t\,\vec{k}$ eğrisinin $0 \le t \le \pi$ aralığındaki uzunluğunu bulunuz.

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{i} - \sin t\,\vec{j} + \cos t\,\vec{k} \Rightarrow S = \int_0^\pi \sqrt{1 + \sin^2 t + \cos^2 t}\, dt = \sqrt{2}\pi \text{ br.} \;//$$