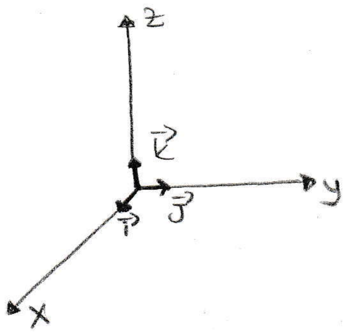
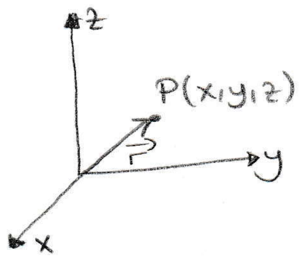
VEKTÖRLER



3-boyutlu uzayda bir kartezyen koordinat sistemi verildiğinde sırasıyla orijinden (1,0,0), (0,1,0), (0,0,1) noktalarına olan, oklarla temsil edilen 3 standart baz vektörü $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ olarak tanımlanır.

* 3 boyutlu uzaydaki herhangi bir vektör bu baz vektörlerinin bir lineer kombinasyonu olarak ifade edilebilir.

örneğin, (x, y, z) noktasının yer vektörü;



$\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ ile verilir.

$\vec{r}$ vektörünün uzunluğu $|\vec{r}| = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$ dir.

* $P_1(x_1, y_1, z_1)$ ve $P_2(x_2, y_2, z_2)$ 3-boyutlu uzayda iki nokta ise P_1'den P_2'ye olan $\vec{v} = \overrightarrow{P_1P_2}$ vektörü :

$$\vec{v} = \overrightarrow{P_1P_2} = \langle x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1 \rangle = (x_2 - x_1)\vec{i} + (y_2 - y_1)\vec{j} + (z_2 - z_1)\vec{k}.$$

* $\vec{u} = u_1\vec{i} + u_2\vec{j} + u_3\vec{k}$, $\vec{v} = v_1\vec{i} + v_2\vec{j} + v_3\vec{k}$, α : sbt

a) $\vec{u} + \vec{v} = (u_1 + v_1)\vec{i} + (u_2 + v_2)\vec{j} + (u_3 + v_3)\vec{k}$

b) $\alpha . \vec{u} = \alpha u_1 \vec{i} + \alpha u_2 \vec{j} + \alpha u_3 \vec{k}$

c) $\vec{u} \parallel \vec{v} \Rightarrow \vec{u} = \alpha \vec{v}$

Birim vektör: Uzunluğu 1 olan vektöre birim vektör denir.

* Her vektörün kendi doğrultu ve yönünde birim vektörü vardır.

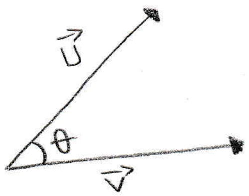
$\vec{u} = u_1\vec{i} + u_2\vec{j} + u_3\vec{k}$ için $\dfrac{\vec{u}}{|\vec{u}|} = \vec{v}$ vektörü $\vec{u}$ yönünde ve doğrultusunda birim vektördür.

Skaler Çarpım :

$\vec{u} = u_1\vec{i} + u_2\vec{j} + u_3\vec{k}$ ve $\vec{v} = v_1\vec{i} + v_2\vec{j} + v_3\vec{k}$ vektörleri için skaler çarpım : $\vec{u}.\vec{v} = u_1v_1 + u_2v_2 + u_3v_3$ olarak tanımlanır.

* Skaler çarpımın sonucu bir sayıdır.

İki vektör arasındaki açı :



$\vec{u}$ ve $\vec{v}$ vektörleri arasındaki açı ;

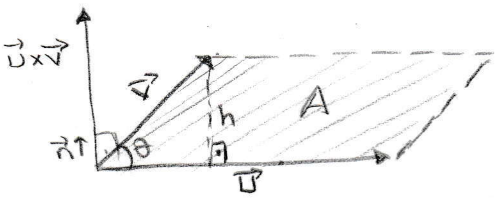
$\vec{u}.\vec{v} = |\vec{u}|.|\vec{v}|.\cos\theta$ ile bulunur.

$\theta = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \vec{u}.\vec{v} = 0 \quad (\vec{u} \perp \vec{v})$

Skaler çarpımın özellikleri :

1) $\vec{u}.\vec{v} = \vec{v}.\vec{u}$
2) $\vec{u}.(\vec{v}+\vec{w}) = \vec{u}.\vec{v} + \vec{u}.\vec{w}$
3) $t.(\vec{u}.\vec{v}) = (t\vec{u}).\vec{v} = \vec{u}.(t\vec{v})$
4) $\vec{u}.\vec{u} = |\vec{u}|^2$
5) $\vec{u} \perp \vec{v} \Leftrightarrow \vec{u}.\vec{v} = 0$
6) $|\vec{u}.\vec{v}| \leq |\vec{u}|.|\vec{v}|$
7) $0.\vec{u} = \vec{0}$

Vektörel Çarpım :



$\sin\theta = \frac{h}{|\vec{v}|}$

$A = h.|\vec{u}| = |\vec{u}|.|\vec{v}|.\sin\theta$

$|\vec{u}x\vec{v}| = |\vec{u}|.|\vec{v}|.\sin\theta$

$\vec{u}$ ve $\vec{v}$ vektörleri paralel değilse bir düzlem belirler. $\vec{u}x\vec{v}$ vektörü bu düzleme ve dolayısıyla $\vec{u}$ ve $\vec{v}$ vektörlerine diktir.

* $\vec{n}$, $\vec{u}$ ve $\vec{v}$ ye dik olan birim vektör olmak üzere,

$$\vec{u}x\vec{v} = \left(|\vec{u}|.|\vec{v}|.\sin\theta\right).\vec{n} \quad \text{dir.}$$

$$\left.\begin{array}{l}\theta = 0 \\ \text{veya} \\ \theta = \pi\end{array}\right\} \vec{u}x\vec{v} = \vec{0} \qquad (\vec{u} \parallel \vec{v} \Rightarrow \vec{u}x\vec{v} = \vec{0})$$

* Skaler çarpım $\mathbb{R}^n$ de geçerlidir fakat vektörel çarpım $\mathbb{R}^3$ de geçerlidir.

* İki vektörün skaler çarpımı sonucu bir sayı, vektörel çarpımın sonucu bir vektördür.

* Vektörel çarpım $\mathbb{R}^3$ deki vektörleri çarpmanın bir diğer yoludur.

Vektörel Çarpımın Özellikleri: $\vec{u}, \vec{v}$ birer vektör, r, s skaler olsun.

1) $(r\vec{u}) \times (s\vec{v}) = (rs)(\vec{u} \times \vec{v})$

2) $\vec{u} \times \vec{v} = -(\vec{v} \times \vec{u})$

3) $0 \times \vec{u} = \vec{u} \times 0 = \vec{0}$

4) $\vec{u} \times (\vec{v} + \vec{w}) = (\vec{u} \times \vec{v}) + (\vec{u} \times \vec{w})$

5) $(\vec{v} + \vec{w}) \times \vec{u} = (\vec{v} \times \vec{u}) + (\vec{w} \times \vec{u})$

6) $\left.\begin{array}{l} (\vec{u} \times \vec{v}) \cdot \vec{u} = 0 \\ (\vec{u} \times \vec{v}) \cdot \vec{v} = 0 \end{array}\right\} \begin{array}{l} \vec{u} \times \vec{v} \perp \vec{u} \\ \vec{u} \times \vec{v} \perp \vec{v} \end{array}$

7) $\vec{u}, \vec{v}$ ve $\vec{u} \times \vec{v}$ sağ el kuralı ile belirlenen bir üçlü oluşturur.

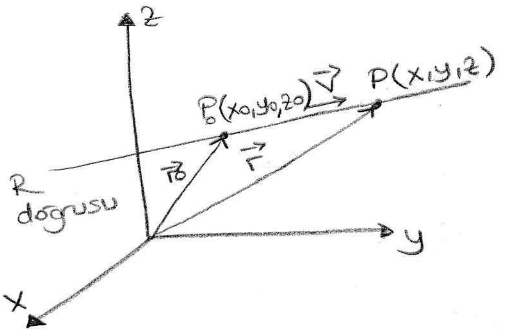
Vektörel Çarpım için Determinant Formülü:

$\vec{u} = u_1\vec{i} + u_2\vec{j} + u_3\vec{k}$, $\vec{v} = v_1\vec{i} + v_2\vec{j} + v_3\vec{k}$ olsun.

$$\vec{u} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} u_2 & u_3 \\ v_2 & v_3 \end{vmatrix} \vec{i} - \begin{vmatrix} u_1 & u_3 \\ v_1 & v_3 \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{vmatrix} \vec{k}$$

DOĞRU – DÜZLEM

Uzayda Doğru Denklemi:



$\vec{r_0} = \langle x_0, y_0, z_0 \rangle$ P_0 noktasının yer vektörü olsun. $\vec{v} = \langle a, b, c \rangle$ vektörü sıfırdan farklı olsun. Bu durumda, P_0'dan geçen $\vec{v}$ ye paralel olan tek bir doğru vardır.

$\vec{r}$ vektörü $P(x,y,z)$ noktasının yer vektörü olmak üzere,

$\vec{r} - \vec{r_0} \parallel \vec{v} \Rightarrow \boxed{\vec{r} - \vec{r_0} = t.\vec{v}}$ Doğrunun vektörel parametrik denklemi

$\Rightarrow \langle x - x_0, y - y_0, z - z_0 \rangle = \langle at, bt, ct \rangle$

$$\Rightarrow \left.\begin{aligned} x - x_0 &= at \\ y - y_0 &= bt \\ z - z_0 &= ct \end{aligned}\right\} \boxed{\begin{aligned} x &= x_0 + at \\ y &= y_0 + bt \\ z &= z_0 + ct \end{aligned}}$$ Doğrunun parametrik denklemi

Özet: Doğru denklemi için,

Doğru üzerinde nokta (x_0, y_0, z_0)

Doğruya paralel vektör (Yön vektörü) (a,b,c)

$$x = x_0 + at$$
$$y = y_0 + bt$$
$$z = z_0 + ct$$

* İki doğru birbirine paralel ise yön vektörleri paraleldir.

Örnek: $(-2, 0, 4)$ noktasından geçen $\vec{v} = 2\vec{i} + 4\vec{j} - 2\vec{k}$ vektörüne paralel olan doğrunun parametrik denklemini bulunuz.

nokta: $(x_0, y_0, z_0) = (-2, 0, 4)$

vektör: $\langle a, b, c \rangle = \langle 2, 4, -2 \rangle$

$$\left.\right\} \begin{aligned} x &= x_0 + at = -2 + 2t \\ y &= y_0 + bt = 0 + 4t \\ z &= z_0 + ct = 4 - 2t \end{aligned}$$ //

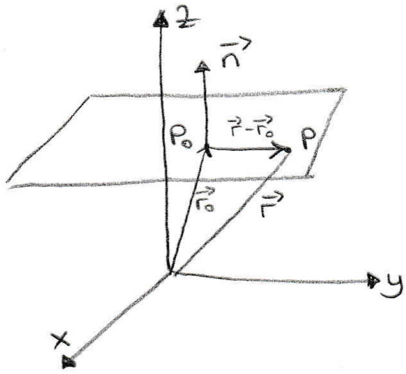
Örnek! $P(-3,2,-3)$, $Q(1,-1,4)$ den geçen doğrunun parametrik denklemini bulunuz.

$\vec{v} = \overrightarrow{PQ} = \langle 4,-3,7 \rangle$

$$x = x_0 + at = -3+4t$$
$$y = y_0 + bt = 2-3t$$
$$z = z_0 + ct = -3+7t$$

* Eğer doğru denklemini biliyorsak, t nin katsayıları bize yön vektörünü verir.

Uzayda Düzlem



$P_0(x_0, y_0, z_0)$ noktasından geçen ve $\vec{n} = \langle A, B, C \rangle$ ye dik olan tek bir düzlem vardır. $P(x,y,z)$, $P_0(x_0,y_0,z_0)$ düzlem üzerinde olsun.

$\vec{r} = \langle x,y,z \rangle \to P$ nin yer vektörü

$\vec{r_0} = \langle x_0,y_0,z_0 \rangle \to P_0$ ın yer vektörü

$\vec{r}-\vec{r_0} \perp \vec{n} \Rightarrow \boxed{(\vec{r}-\vec{r_0}) \cdot \vec{n} = 0} \to$ Düzlemin vektörel denklemi

$\Rightarrow \langle x-x_0, y-y_0, z-z_0 \rangle \cdot \langle A,B,C \rangle = 0$

$\Rightarrow \boxed{A(x-x_0) + B(y-y_0) + C(z-z_0) = 0} \to$ Düzlem denklemi

P_0 noktasından geçen $\vec{n}$ ye dik olan düzlemin denklemi

$$Ax+By+Cz = \underbrace{Ax_0+By_0+Cz_0}_{D}$$

$\boxed{Ax+By+Cz=D}$ Düzlem denklemi

$\vec{n} = \langle A,B,C \rangle$ vektörüne düzlemin normal vektörü denir.

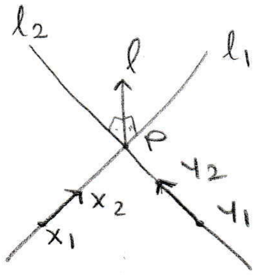
* Düzlem
  - Nokta (x_0,y_0,z_0)
  - Normal vektör $\langle A,B,C \rangle$

yapma

Örnek: $X_1(1,4,2)$ ve $X_2(1,5,3)$ noktalarından geçen l_1 doğrusu ile $Y_1(3,1,5)$ ve $Y_2(4,0,7)$ den geçen l_2 doğrusu bir P noktasında kesişiyor.

a) P noktasını bulunuz.

b) Öyle bir l doğrusu bulun ki hem P den geçsin hem de l_1 ve l_2 doğrularına dik olsun.



a) $l_1 : \overrightarrow{X_1X_2} = \langle 0,1,1 \rangle \quad , X_1(1,4,2)$

$$l_1 : \begin{cases} x = 1 \\ y = 4+t \\ z = 2+t \end{cases}$$

$l_2 : \overrightarrow{Y_1Y_2} = \langle 1,-1,2 \rangle \quad , Y_1(3,1,5)$

$$l_2 : \begin{cases} x = 3+s \\ y = 1-s \\ z = 5+2s \end{cases}$$

P : $3+s=1 \Rightarrow s=-2$

$1-s = 4+t \Rightarrow t=-1$

$\underline{P(1,3,1)}$ //

b) l_1 yön vektörü $\vec{v}_1 = \langle 0,1,1 \rangle$

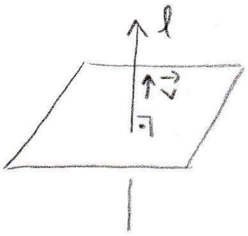
l_2 " " $\vec{v}_2 = \langle 1,-1,2 \rangle$

$$\vec{v} \perp \vec{v}_1 \text{ ve } \vec{v} \perp \vec{v}_2 \Rightarrow \vec{v} = \vec{v}_1 \times \vec{v}_2 = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 3\vec{i} + \vec{j} - \vec{k}$$

$$l = \begin{cases} x = 1+3t \\ y = 3+t \\ z = 1-t \end{cases}$$

//

Örnek! $(1,1,1)$ noktasından geçen ve $l=\begin{cases} x=2+t \\ y=1+2t \\ z=3 \end{cases}$ doğrusuna dik olan düzlemin denklemini bulunuz.



$$l=\begin{cases} x=\boxed{2}+\boxed{t} \\ y=\boxed{1}+\boxed{2t} \\ z=\boxed{3} \end{cases}$$

nokta

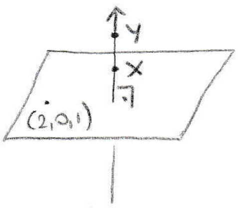
yön vektörü

$$\vec{n}=\vec{v}=\langle 1,2,0\rangle$$

$$1.(x-1)+2.(y-1)+0.(z-1)=0$$

$$x+2y=3 \;//$$

Örnek! $(2,0,1)$ den geçen ve $X(1,1,0)$ ve $Y(4,-1,-2)$ noktalarından geçen doğruya dik olan düzlemin denklemini bulunuz.



$$\vec{n}=\overrightarrow{XY}=\langle 3,-2,-2\rangle$$

$$3.(x-2)-2(y-0)-2(z-1)=0$$

$$3x-2y-2z=4 \;//$$

Örnek! $2x+y+3z=6$ düzleminin normalini, düzlem üzerinde bir noktayı ve eksenleri kesim noktalarını bulunuz.

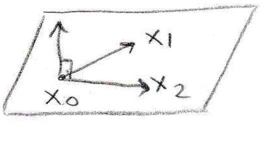
$2x+y+3z=6 \Rightarrow \vec{n}=\langle 2,1,3\rangle$

$x=y=1 \Rightarrow z=1 \Rightarrow (1,1,1) \rightarrow$ düzlem üzerindeki bir nokta

$$\left.\begin{array}{l} x=y=0 \Rightarrow z=2 \\ x=z=0 \Rightarrow y=6 \\ y=z=0 \Rightarrow x=3 \end{array}\right] \text{eksenleri kesim noktaları}$$

3 Nokta ile Belirlenmiş Düzlemin Normali:

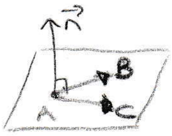
$\vec{n}=\overrightarrow{X_0X_1}\times\overrightarrow{X_0X_2}$



Aynı doğru üzerinde olmayan X_0, X_1, X_2 noktalarından geçen düzlemin normali

$$\vec{n}=\overrightarrow{X_0X_1}\times\overrightarrow{X_0X_2}$$

Örnek! $A(0,0,1)$, $B(2,0,0)$, $C(0,3,0)$ noktalarından geçen düzlemi bulun.



$\overrightarrow{AB}=\langle 2,0,-1\rangle$

$\overrightarrow{AC}=\langle 0,3,-1\rangle$.

$$\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}=\vec{n}=\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & 0 & -1 \\ 0 & 3 & -1 \end{vmatrix}=\langle 3,2,6\rangle$$

$$3.(x-0)+2(y-0)+6(z-1)=0 \Rightarrow 3x+2y+6z=6 \;//$$

Paralel ve Kesişen Düzlemler - Doğrular:

1) Normal vektörleri paralel olan iki düzlem paraleldir. Paralel olmayan düzlemler (bir doğruda) kesişirler.

2) Normal vektörleri dik olan iki düzlem diktir.

$\cos\theta = \dfrac{\vec{n_1}\cdot\vec{n_2}}{|\vec{n_1}||\vec{n_2}|}$ → Düzlemler arasındaki açı, normalleri arasındaki açıya eşittir.

3) Bir düzlemin normali $\vec{n}$, bir doğrunun yön vektörü $\vec{v}$ olsun.

a) $\vec{n} \parallel \vec{v}$ ise doğru ile düzlem diktir.

b) $\vec{n} \perp \vec{v}$ ise doğru ile düzlem paraleldir.

Örnek: $x-2y+5z=1$ düzlemi ile $\vec{r}(t) = \langle 2-t, 1+2t, -1+t \rangle$ doğrusu paralel midir?

$x-2y+5z=1 \Rightarrow \vec{n} = \langle 1,-2,5 \rangle$

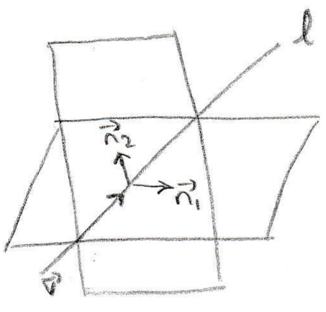
$\left.\begin{array}{l} x=2-t \\ y=1+2t \\ z=-1+t \end{array}\right\} \vec{v} = \langle -1,2,1 \rangle$

$\vec{n}\cdot\vec{v} = -1-4+5 = 0 \Rightarrow \vec{n} \perp \vec{v}$

Doğru ile düzlem paraleldir.

- İki doğrunun kesişimi nokta
- İki düzlemin kesişimi doğru
- Doğru ile düzlemin kesişimi noktadır.

Kesişim Doğrusu:



İki düzlemin kesişim doğrusu (arakesit doğrusu); düzlemlerin normal vektörleri $\vec{n_1}$ ve $\vec{n_2}$ nin ikisine de diktir. Dolayısıyla arakesit doğrusu $\vec{n_1} \times \vec{n_2}$ ye paraleldir.

Doğrunun yön vektörü $\boxed{\vec{v} = \vec{n_1} \times \vec{n_2}}$

Örnek! $3x-2y+z=2$ ve $x-y+3z=8$ ile verilen düzlemlerin arakesit doğrusunun parametrik denklemlerini bulunuz.

$$3x-2y+z=2 \Rightarrow \vec{n}_1=\langle 3,-2,1\rangle$$
$$x-y+3z=8 \Rightarrow \vec{n}_2=\langle 1,-1,3\rangle$$
$$\vec{v}=\vec{n}_1\times\vec{n}_2$$

$$\vec{v}=\vec{n}_1\times\vec{n}_2=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 3 & -2 & 1\\ 1 & -1 & 3\end{vmatrix}=\langle -5,-8,-1\rangle$$

$$\left.\begin{matrix}3x-2y+z=2\\ x-y+3z=8\end{matrix}\right] \quad x=1 \Rightarrow \left.\begin{matrix}-2y+z=-1\\ -y+3z=7\end{matrix}\right] \begin{matrix}y=2\\ z=3\end{matrix}$$

$(1,2,3) \rightarrow$ arakesit üzerindeki nokta

$$x=1-5t$$
$$y=2-8t$$
$$z=3-t$$
//

Örnek! $x-y=3$, $x+y+z=0$ düzlemlerinin arakesit doğrusuna paralel olan vektörü ve arakesit doğrusunu bulunuz.

$$\vec{n}_1=\langle 1,-1,0\rangle \qquad \vec{v}=\vec{n}_1\times\vec{n}_2=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 1 & -1 & 0\\ 1 & 1 & 1\end{vmatrix}=\langle -1,-1,2\rangle$$
$$\vec{n}_2=\langle 1,1,1\rangle$$

$$\left.\begin{matrix}x-y=3\\ x+y+z=0\end{matrix}\right] \quad z=0 \Rightarrow \begin{matrix}x-y=3\\ x+y=0\end{matrix} \Rightarrow \begin{matrix}x=\frac{3}{2}\\ y=-\frac{3}{2}\end{matrix} \qquad \begin{matrix}x=\frac{3}{2}-t\\ y=-\frac{3}{2}-t\\ z=2t\end{matrix}$$
//

Örnek! $x=\frac{8}{3}+2t$, $y=-2t$, $z=1+t$ doğrusunun $3x+2y+6z=6$ düzlemi ile kesiştiği noktayı bulunuz.

$$3\left(\frac{8}{3}+2t\right)+2(-2t)+6(1+t)=6$$
$$8t=-8 \Rightarrow \underline{t=-1}$$

$$x=\frac{2}{3} \qquad \underline{\left(\frac{3}{2},2,0\right)} \rightarrow \text{kesişim noktası}$$
$$y=2$$
$$z=0$$
//