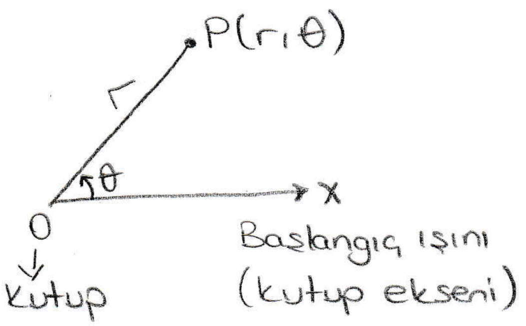
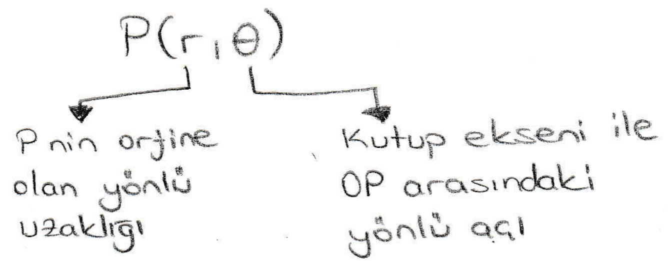
~ KUTUPSAL KOORDİNATLAR ~

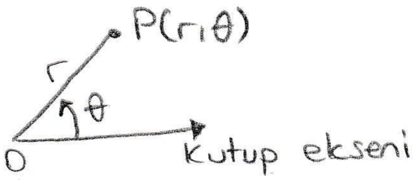
x ve y dik koordinatları düzlemdeki bir P noktasını bir dikey doğru ile bir yatay doğrunun kesişmesi olarak belirtir. Kutupsal koordinatlar ile bir P noktasını, bir çemberle merkezinden çıkan bir ışının kesişmesi olarak belirtir ve aşağıdaki gibi tanımlanır:

Düzlem üzerinde bir nokta ve bu noktadan çıkan bir ışın seçelim. Noktaya kutup, ışına ise kutup ekseni denir. Bu durumda düzlemdeki herhangi bir P noktasını (r,θ) kutupsal koordinat çifti ile gösterebiliriz.

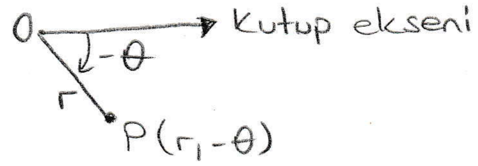




Pozitif θ → Saatin tersi yönünde

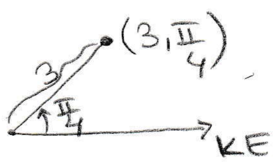


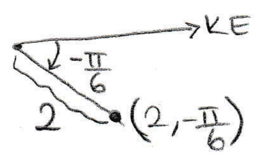
Negatif θ → Saat yönünde ölçülür.

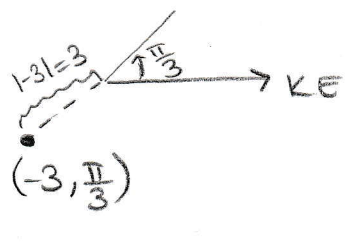


* Bir noktayı temsil eden sonsuz tane kutupsal koordinat çifti vardır.
* Eğer $r=0$ ise θ ne olursa olsun P kutuptur.
* Eğer $r<0$ ise; P, θ açılı ışının ters yönündeki $\theta+\pi$ açılı ışın üzerinde olup kutuptan $|r|$ birim uzaklıktadır.

Örnek!







* $(r,\theta)=(-r,\theta+\pi)=(-r,\theta+3\pi)=\dots=(-r,\theta+(2k+1)\pi)$

* $(r,\theta)=(r,\theta+2\pi)=(r,\theta+4\pi)=\dots=(r,\theta+2k\pi)$

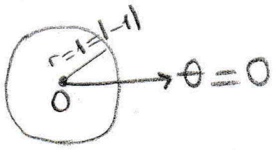
* Eğer $0\leq\theta\leq 2\pi$ kabul edilirse düzlemin her noktasına tek bir (r,θ) kutupsal çifti karşılık gelir.

Kutupsal Denklemler ve Grafikleri

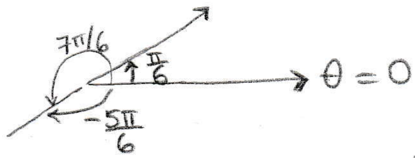
Denklem	Grafiği
$r=a$	Merkezi O da yarıçapı $\lvert a\rvert$ olan çember
$\theta=\theta_0$	O dan geçen ve kutup ekseni ile θ_0 açısı yapan doğru

Örnek: Kutupsal koordinatları aşağıdaki şartları sağlayan noktalar kümesinin grafiğini çizin.

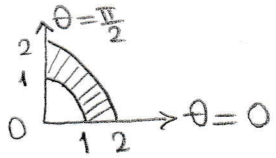
a) $r=1$ ve $r=-1$



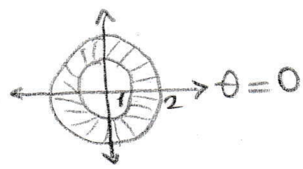
b) $\theta=\frac{\pi}{6}$, $\theta=\frac{7\pi}{6}$, $\theta=-\frac{5\pi}{6}$



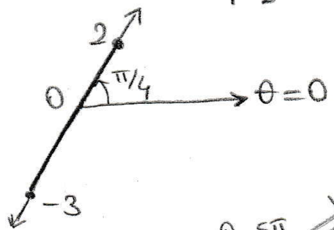
c) $1\leq r\leq 2$ ve $0\leq\theta\leq\frac{\pi}{2}$



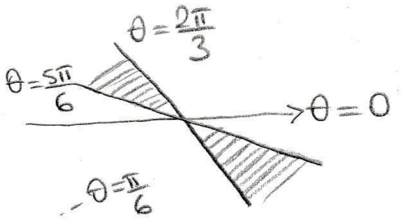
θ kısıtlaması olmasaydı



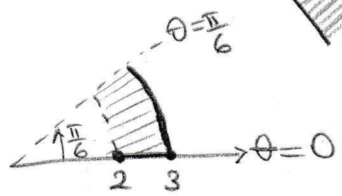
d) $-3\leq r\leq 2$ ve $\theta=\frac{\pi}{4}$



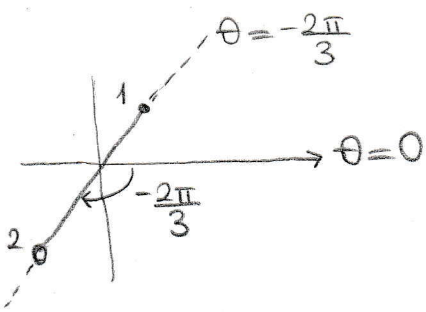
e) $\frac{2\pi}{3}\leq\theta\leq\frac{5\pi}{6}$



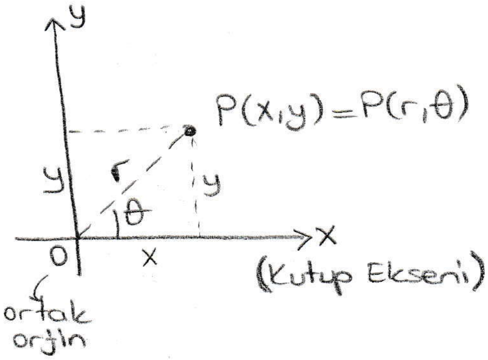
f) $2<r\leq 3$, $0\leq\theta<\frac{\pi}{6}$



g) $-1\leq r<2$, $\theta=-\frac{2\pi}{3}$



Kutupsal Koordinatlar ile Kartezyen Koordinatlar Arasındaki Bağıntılar:



$$\boxed{\begin{aligned} x &= r\cos\theta \\ y &= r\sin\theta \\ x^2+y^2 &= r^2 \end{aligned}}$$

$$\boxed{\tan\theta = \frac{y}{x}}$$

Örnek! $x^2+y^2=a^2$ çemberinin kutupsal denklemini yazın.

$$\left.\begin{aligned} x &= r\cos\theta \\ y &= r\sin\theta \end{aligned}\right]\; x^2+y^2=r^2=a^2 \Rightarrow r=|a| \,//$$

Örnek! $x^2+(y-3)^2=9$ çemberinin kutupsal denklemini yazın.

$$x^2+y^2-6y+9=9 \Rightarrow \quad x^2+y^2-6y=0 \Rightarrow r^2-6r\sin\theta=0$$
$$\Rightarrow r=6\sin\theta \,//$$

Örnek! $r^2=a^2\cos 2\theta$ nın kartezyen denklemini yazın.

$$\left.\begin{aligned} x &= r\cos\theta \\ y &= r\sin\theta \\ \cos 2\theta &= \cos^2\theta-\sin^2\theta \end{aligned}\right\} \quad r^2=a^2(\cos^2\theta-\sin^2\theta)=a^2\left(\frac{x^2}{r^2}-\frac{y^2}{r^2}\right)$$

$$r^2=\frac{a^2}{r^2}(x^2-y^2)$$

$$(r^2)^2=a^2(x^2-y^2)$$

$$(x^2+y^2)^2=a^2(x^2-y^2) \,//$$

Örnek! $r=\dfrac{4}{2\cos\theta-\sin\theta}$ kartezyen denklemini yazınız.

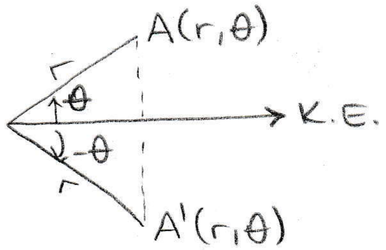
$$r(2\cos\theta-\sin\theta)=4 \Rightarrow 2r\cos\theta-r\sin\theta=4 \Rightarrow 2x-y=4 \Rightarrow y=2x-4 \,//$$

Örnek!

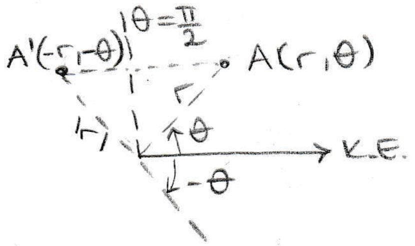
Kutupsal denklem	Kartezyen Denkliği
$r\cos\theta=2$	$x=2$
$r^2\cos\theta\sin\theta=4$	$xy=4$
$r^2\cos^2\theta-r^2\sin^2\theta=1$	$x^2-y^2=1$
$r=1+2r\cos\theta$	$y^2-3x^2-4x-1=0$
$r=1-\cos\theta$	$x^4+y^4+2x^2y^2+2x^3+2xy^2-y^2=0$
$r=2a\cos\theta$	$(x-a)^2+y^2=a^2$
$r=4\cos\theta$	$(x-2)^2+y^2=4$

Simetri Özellikleri ;

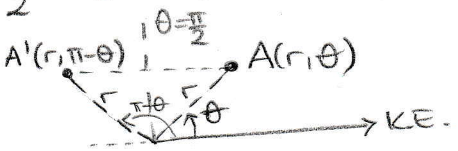
1) a) $r=f(\theta)$ da θ yerine $-\theta$ yazdığımızda $f(-\theta)=f(\theta)=r$ ise kutup eksenine göre simetri vardır.



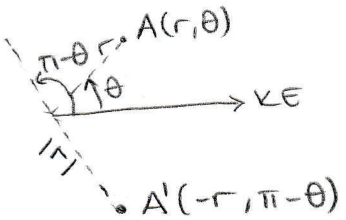
b) $r=f(\theta)$ da θ yerine $-\theta$ yazılınca $f(-\theta)=-f(\theta)=-r$ oluyor ise $\theta=\frac{\pi}{2}$ ye göre simetri vardır.



2) a) $r=f(\theta)$ da θ yerine $\pi-\theta$ yazılınca $f(\pi-\theta)=f(\theta)=r$ ise $\theta=\frac{\pi}{2}$ ye göre simetri vardır.

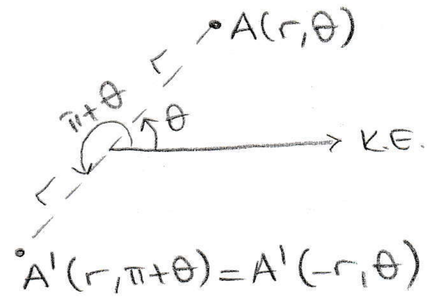


b) $r=f(\theta)$ da θ yerine $\pi-\theta$ yazılınca $f(\pi-\theta)=-f(\theta)=-r$ ise kutup ekseni-ne göre simetri vardır.



3) a) $r=f(\theta)$ da θ yerine $\pi+\theta$ yazılınca $f(\pi+\theta)=f(\theta)=r$ ise orjine(kutuba) göre simetri vardır.

b) (r,θ) eğri üzerinde iken $(-r,\theta)$ da eğri üzerinde ise orjine göre simetri vardır.



$r=f(\theta)$ Egrisinin Egimi ; ($\frac{dy}{dx}$ türevinin (r,θ) daki değeri)

$r=f(\theta)$ kutupsal egrisi için;

$$\left.\begin{aligned} x &= r\cos\theta = f(\theta).\cos\theta \\ y &= r\sin\theta = f(\theta).\sin\theta \end{aligned}\right\} \quad \frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{d\theta}}{\frac{dx}{d\theta}} = \frac{f'(\theta).\sin\theta + f(\theta).\cos\theta}{f'(\theta).\cos\theta - f(\theta).\sin\theta}$$

(r,θ) noktasında $r=f(\theta)$ nın egimi:

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{(r,\theta)} = \left.\frac{f'(\theta)\sin\theta + f(\theta).\cos\theta}{f'(\theta)\cos\theta - f(\theta)\sin\theta}\right|_{(r,\theta)}$$

Kutupsal Koordinatlarda Eğri Çizimi :

$r=f(\theta)$ egrisinin grafiğini çizerken;

1) Eğri periyodik ise periyodu bulunur.

2) Simetri durumu incelenip çizim aralığı belirlenir.

3) $r=f(\theta)$ nın degişimi türev yardımıyla incelenir.

4) Bazı θ'lar için $(\theta, f(\theta))$ noktaları bulunur.

5) θ, r, r' içeren tablo yapılıp eğri çizilir.

Örnek: $r = a(1+\cos\theta)$ $(a>0)$ eğrisini çiziniz.

1) Periyod : $2\pi \rightarrow [0, 2\pi]$ de çizilir.

2) $\theta \rightarrow -\theta \Rightarrow f(-\theta) = a(1+\cos(-\theta)) = a(1+\cos\theta) = f(\theta) = r \Rightarrow$ Kutup eks. göre simetrik

$\theta \rightarrow \pi-\theta \Rightarrow f(\pi-\theta) = a(1+\cos(\pi-\theta)) = a(1-\cos\theta) \Rightarrow$ 2. simetri öz. yok.

$\theta \rightarrow \pi+\theta \Rightarrow f(\pi+\theta) = a(1+\cos(\pi+\theta)) = a(1-\cos\theta) \Rightarrow$ 3. simetri öz. yok.

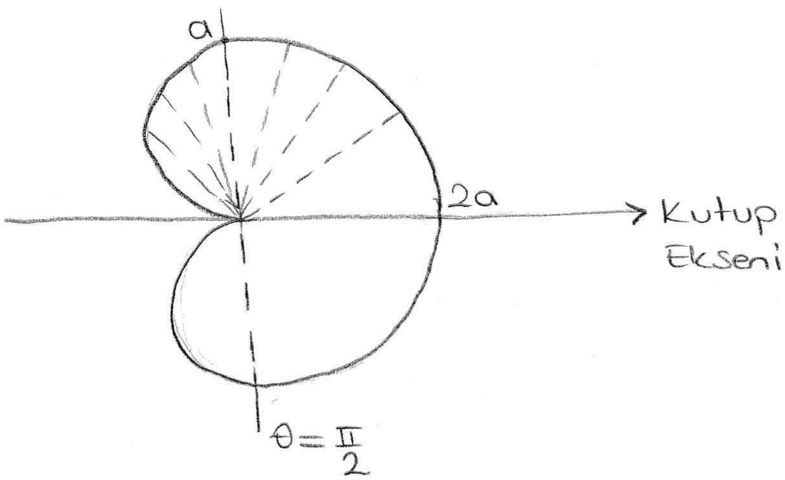
Kutup eksenine göre simetri olduğundan inceleme aralığı $[0, \pi]$ dır.

3) $r'(\theta) = -a.\sin\theta < 0$ $(\theta \in (0, \pi))$ azalan fonksiyon.

4) $\theta = 0 \Rightarrow r = 2a$ $(2a, 0)$
$\theta = \pi \Rightarrow r = 0$ $(0, \pi)$
$\theta = \frac{\pi}{2} \Rightarrow r = a$ $(a, \frac{\pi}{2})$

5)

θ	0	$\pi/2$	π
r'	$-$	$-$	$-$
r	$2a \searrow$	$a \searrow$	0



Örnek! $r = a(1-\sin\theta)$ eğrisini çiziniz.

1) Periyodu : $2\pi \rightarrow [0, 2\pi]$ de çizelim.

2) $\theta \rightarrow -\theta \Rightarrow f(-\theta) = a(1-\sin(-\theta)) = a(1+\sin\theta) \rightarrow$ 1. simetri yok

$\theta \rightarrow \pi-\theta \Rightarrow f(\pi-\theta) = a(1-\sin(\pi-\theta)) = a(1-\sin\theta) = f(\theta) \rightarrow \theta = \frac{\pi}{2}$ 'ye göre simetri var

$\theta \rightarrow \pi+\theta \Rightarrow f(\pi+\theta) = a(1-\sin(\pi+\theta)) = a(1+\sin\theta) \rightarrow$ 3. simetri yok

$\theta = \frac{\pi}{2}$ 'ye göre simetri olduğundan inceleme aralığı $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ dir.

3) $f'(\theta) = -a\cos\theta < 0 \quad \left(\theta \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)\right)$

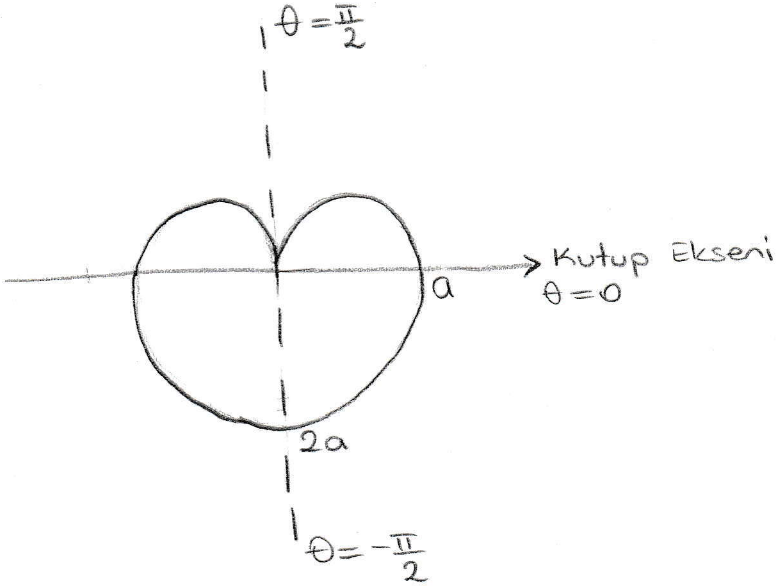
4) $\theta = \frac{\pi}{2} \Rightarrow r = 0$

$\theta = -\frac{\pi}{2} \Rightarrow r = 2a$

$\theta = 0 \Rightarrow r = a$

5)

θ	$-\pi/2$	0	$\pi/2$
r'	$-$	$-$	$-$
r	$2a \searrow$	$a \searrow$	0



Örnek: $r = 1-\cos\theta$ eğrisini çizin.

1) Periyodu : 2π $\rightarrow$ $[0, 2\pi]$ de çizelim

2) $\theta \rightarrow -\theta \Rightarrow f(-\theta) = 1-\cos(-\theta) = 1-\cos\theta = f(\theta)$ $\rightarrow$ Kutup eks. göre simetri var.

$\theta \rightarrow \pi-\theta \Rightarrow f(\pi-\theta) = 1-\cos(\pi-\theta) = 1+\cos\theta$ $\rightarrow$ simetri yok.

$\theta \rightarrow \pi+\theta \Rightarrow f(\pi+\theta) = 1-\cos(\pi+\theta) = 1+\cos\theta$ $\rightarrow$ simetri yok.

Kutup eksenine göre simetri olduğundan inceleme aralığı $[0, \pi]$ dır.

3) $r' = \sin\theta > 0$ $\quad (\theta \in (0, \pi))$ artan bir fonksiyon.

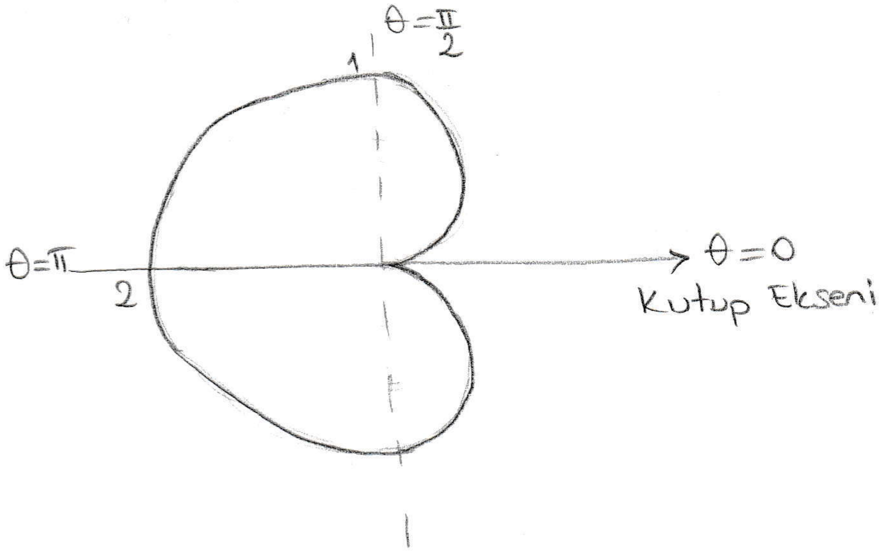
4) $\theta = 0 \Rightarrow r = 0$

$\theta = \frac{\pi}{2} \Rightarrow r = 1$

$\theta = \pi \Rightarrow r = 2$

5)

θ	0	$\pi/2$	π
r'	$+$	$+$	
r	$0 \nearrow$	$1 \nearrow$	2



Örnek! $r = 2-4\sin\theta$ eğrisini çiziniz.

1) Periyodu : 2π $\rightarrow [0, 2\pi]$ de çiz.

2) $\theta \rightarrow -\theta \Rightarrow f(-\theta) = 2+4\sin\theta \rightarrow$ sim. yok

$\theta \rightarrow \pi-\theta \Rightarrow f(\pi-\theta) = 2-4\sin(\pi-\theta) = 2-4\sin\theta = f(\theta) \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{2}$'ye göre simetri var

$\theta \rightarrow \pi+\theta \Rightarrow f(\pi+\theta) = 2-4\sin(\pi+\theta) = 2+4\sin\theta \rightarrow$ sim. yok

$\theta = \frac{\pi}{2}$ ye göre simetri olduğundan inceleme aralığı $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$

3) $r' = -4\cos\theta > 0 \quad (\theta \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}))$ azalan

4) $\theta = -\frac{\pi}{2} \Rightarrow r = 6$

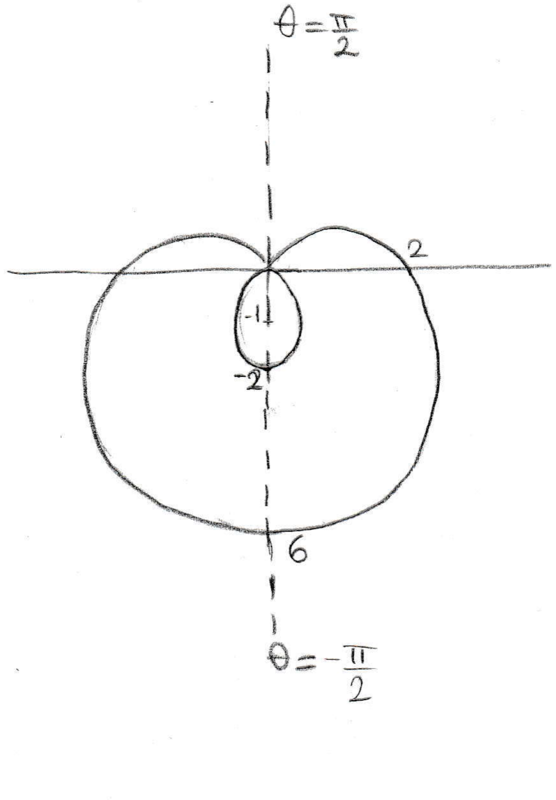
$\theta = 0 \Rightarrow r = 2$

$\theta = \frac{\pi}{2} \Rightarrow r = -2$

$\theta = \frac{\pi}{6} \Rightarrow r = 0$

5)

θ	$-\frac{\pi}{2}$	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{2}$
r'	$-$	$-$	$-$	
r	6	2	0	-2



Bazı Temel Şekiller :

Çemberler

1) $r=a$ $|a|$ yarıçaplı merkezil çember

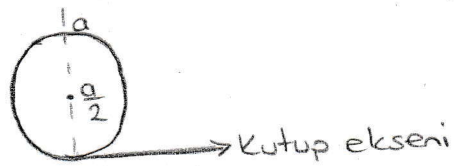
$x^2+y^2=a^2$ çemberi

2) $r=a\cos\theta$: Kutup ve $(a,0)$ noktalarından geçen $\frac{a}{2}$ yarıçaplı çember

$r=a\cos\theta \Rightarrow r^2=a^2\cos^2\theta \Rightarrow x^2+y^2=a^2\frac{x^2}{r^2}$

$(x^2+y^2)^2=a^2x^2 \Rightarrow x^2+y^2=ax \Rightarrow (x-\frac{a}{2})^2+y^2=\frac{a^2}{4}$

3) $r=a\sin\theta$: Kutup ve $(a,\frac{\pi}{2})$ noktalarından geçen $\frac{a}{2}$ yarıçaplı çember



$x^2+(y-\frac{a}{2})^2=\frac{a^2}{4}$ çemberi

Doğrular

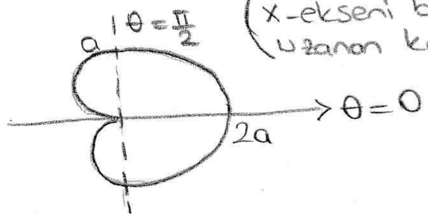
4) $\theta=\alpha \rightarrow$ Eğimi α olan doğru

5) $r\cos\theta=a$ veya $r=a\sec\theta \Rightarrow x=a$ doğrusu

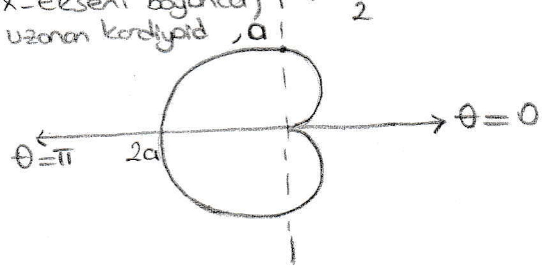
$r\sin\theta=b$ veya $r=b\operatorname{cosec}\theta \Rightarrow y=b$ doğrusu

Kardiyoidler

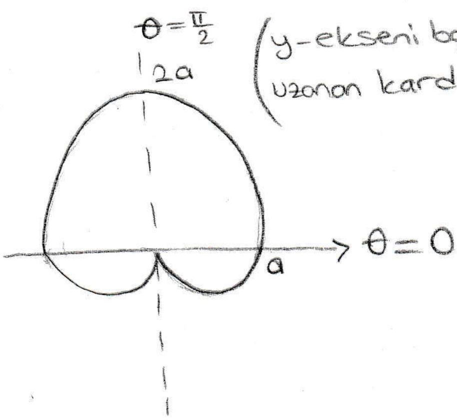
6) $r=a(1+\cos\theta)$ $(a>0)$ (x-ekseni boyunca uzanan kardiyoid)



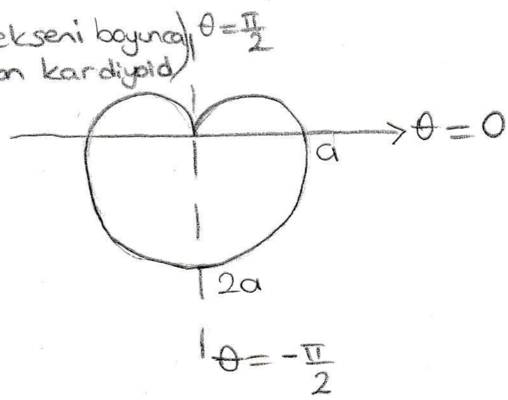
7) $r=a(1-\cos\theta)$ $(a>0)$ (x-ekseni boyunca uzanan kardiyoid)



8) $r=a(1+\sin\theta)$ $(a>0)$ (y-ekseni boyunca uzanan kardiyoid)



9) $r=a(1-\sin\theta)$ $(a>0)$ (y-ekseni boyunca uzanan kardiyoid)



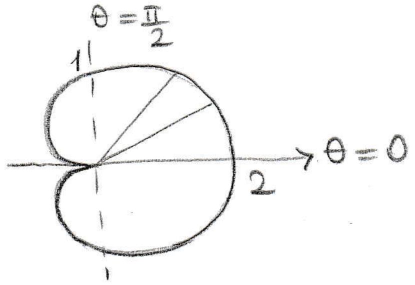
Kutupsal Koordinatlarda Alan ;

$r=f(\theta)$ denklemiyle verilmiş bir eğrinin $\theta=\alpha$ ve $\theta=\beta$ doğrularıyla sınırladığı alan :

$$\boxed{A=\frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta} r^2\,d\theta}$$

formülü ile hesaplanır.

Örnek: $r=1+\cos\theta$ eğrisinin sınırladığı bölgenin alanını bulunuz.



$$\frac{A}{2}=\frac{1}{2}\int_0^{\pi}(1+\cos\theta)^2\,d\theta=\frac{1}{2}\int_0^{\pi}\left(1+2\cos\theta+\cos^2\theta\right)d\theta$$

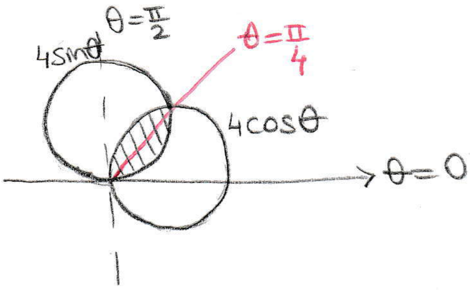
$$=\frac{1}{2}\left(\theta+2\sin\theta\right)\Big|_0^{\pi}+\frac{1}{2}\int_0^{\pi}\frac{1+\cos 2\theta}{2}\,d\theta$$

$$=\frac{1}{2}\left(\pi+0\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{\theta}{2}+\frac{\sin 2\theta}{4}\right)\Big|_0^{\pi}$$

$$=\frac{1}{2}\left(\pi+\frac{\pi}{2}\right)=\frac{3\pi}{4}$$

$$A=\frac{3\pi}{2}\ br^2 \ //$$

Örnek: $r=4\cos\theta$ ile $r=4\sin\theta$ eğrilerinin sınırladığı ortak alanı bulunuz.



$\cos\theta=\sin\theta$

$\theta=\frac{\pi}{4}$

$$A=\frac{1}{2}\int_0^{\pi/4}(4\sin\theta)^2\,d\theta+\frac{1}{2}\int_{\pi/4}^{\pi/2}(4\cos\theta)^2\,d\theta$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^{\pi/4}16\,\frac{1-\cos 2\theta}{2}\,d\theta+\frac{1}{2}\int_{\pi/4}^{\pi/2}16\,\frac{1+\cos 2\theta}{2}\,d\theta$$

$$=4\left(\theta-\frac{\sin 2\theta}{2}\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{4}}+4\left(\theta+\frac{\sin 2\theta}{2}\right)\Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}$$

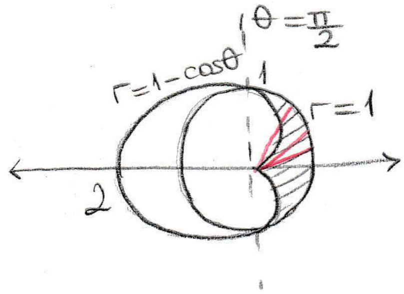
$$=4\left(\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}\right)+4\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}\right)$$

$$=2\pi-4\ br^2 \ //$$

* $\theta=\alpha$, $\theta=\beta$, $r_1=f_1(\theta)$ ve $r_2=f_2(\theta)$ arasındaki bölgenin alanı $(r_1<r_2)$:

$$A=\int_{\alpha}^{\beta}\frac{1}{2}r_2^2\,d\theta-\int_{\alpha}^{\beta}\frac{1}{2}r_1^2\,d\theta=\frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta}(r_1^2-r_2^2)\,d\theta$$

Örnek! $r=1$ çemberinin içinde ve $r=1-\cos\theta$ kardiyoidinin dışında kalan bölgenin alanı?



$$\frac{A}{2}=\frac{1}{2}\int_{0}^{\pi/2}\left[1^2-(1-\cos\theta)^2\right]d\theta$$

$$A=2-\frac{\pi}{4}\text{ br}^2$$

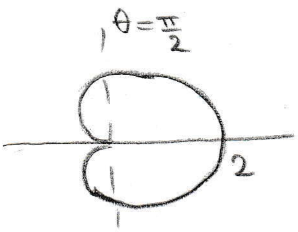
Kutupsal Eğrinin Uzunluğu !

$r=f(\theta)$ eğrisinin $\theta=\alpha$ ve $\theta=\beta$ arasındaki uzunluğu :

$$\boxed{L=\int_{\alpha}^{\beta}\sqrt{r^2+(r')^2}\,d\theta}$$

formülü ile bulunur.

Örnek! $r=1+\cos\theta$ eğrisinin uzunluğu?



$$\left.\begin{array}{l} r=1+\cos\theta \\ r'=-\sin\theta \end{array}\right] r^2+(r')^2=1+2\cos\theta+\cos^2\theta+\sin^2\theta$$

$$=2(1+\cos\theta)$$

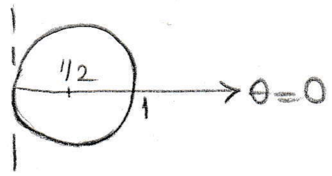
$$=2.2.\cos^2\frac{\theta}{2}=4\cos^2\frac{\theta}{2}$$

$$L=\int_{0}^{2\pi}\sqrt{4\cos^2\frac{\theta}{2}}\,d\theta=\int_{0}^{2\pi}2\left|\cos\frac{\theta}{2}\right|d\theta=\int_{0}^{\pi}2\cos\frac{\theta}{2}\,d\theta+2\int_{\pi}^{2\pi}\left(-\cos\frac{\theta}{2}\right)d\theta$$

$$=4\sin\frac{\theta}{2}\Big|_{0}^{\pi}-4\sin\frac{\theta}{2}\Big|_{\pi}^{2\pi}$$

$$=4+4=8\text{ br.}$$

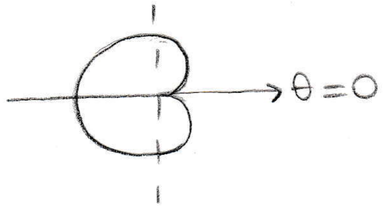
Örnek: $r=\cos\theta$ çemberinin uzunluğunu bulunuz.



$$r=\cos\theta$$
$$r'=-\sin\theta$$
$$r^2+(r')^2=\cos^2\theta+\sin^2\theta=1$$

$$L=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{1}\,d\theta=\theta\Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}=\left(\frac{\pi}{2}-\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right)=\pi \text{ br.}$$

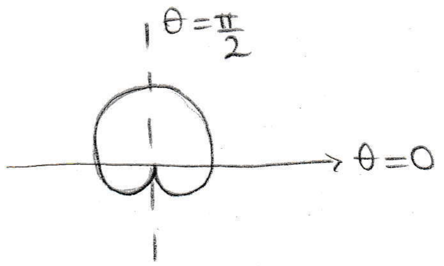
Örnek: $r=1-\cos\theta$ kardiyoidinin uzunluğunu bulunuz.



$$r=1-\cos\theta$$
$$r'=\sin\theta$$
$$r^2+(r')^2=1-2\cos\theta+\cos^2\theta+\sin^2\theta$$
$$=2(1-\cos\theta)=2.2\sin^2\frac{\theta}{2}$$

$$L=\int_0^{2\pi}2\left|\sin\frac{\theta}{2}\right|d\theta=2\int_0^{2\pi}\sin\frac{\theta}{2}\,d\theta=2.2\left(-\cos\frac{\theta}{2}\right)\Big|_0^{2\pi}$$
$$=4(+1+1)=8 \text{ br.}$$

Örnek: $r=1+\sin\theta$ kardiyoidinin uzunluğunu bulunuz.



$$r=1+\sin\theta$$
$$r'=\cos\theta$$
$$r^2+(r')^2=1+2\sin\theta+\sin^2\theta+\cos^2\theta$$
$$=2(1+\sin\theta)$$
$$=2\left(1+\cos\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)\right)$$
$$=4.\cos^2\frac{\pi-2\theta}{4}$$

$$L=2.\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}2\left|\cos\frac{\pi-2\theta}{4}\right|d\theta=4.\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos\left(\frac{\pi-2\theta}{4}\right)d\theta$$
$$=4\left(-2.\sin\frac{\pi-2\theta}{4}\right)\Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}$$
$$=4(2)=8 \text{ br.}$$