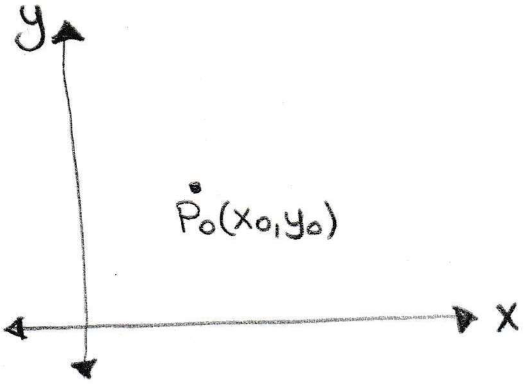
# Yönlü Türev :




$P_0(x_0,y_0)$ noktasında $\vec{u} = u_1\vec{i} + u_2\vec{j}$ birim vektörü yönünde $f(x,y)$ nin türevi , limitin mevcut olması halinde ,

$$\left(\frac{df}{ds}\right)_{\vec{u},P_0} = (D_u f)_{P_0}$$

$$= \lim_{s \to 0} \frac{f(x_0 + su_1, y_0 + su_2) - f(x_0, y_0)}{s}$$

$$\left.\begin{array}{l} f_x(x_0,y_0) \rightarrow f.\text{in } \vec{i} \text{ yönündeki} \\ f_y(x_0,y_0) \rightarrow f \text{ in } \vec{j} \text{ yönündeki} \end{array}\right\} \text{yönlü türevleridir.}$$

## Gradyent Vektör :

$f(x,y)$ fonksiyonunun gradyent vektörü

$$\text{Grad} f = \nabla f = \left\langle \frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y} \right\rangle = \langle f_x, f_y \rangle$$

$$= \frac{\partial f}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial f}{\partial y}\vec{j}$$

dir.

## Yönlü Türev :

Eger $f(x,y)$, $P_0(x_0, y_0)$ içeren bir bölgede türevlenebilir ise, $f$ in $P_0$ daki $\vec{u}$ birim vektörü yönündeki türevi

$$(D_u f)_{P_0} = (\nabla f)_{P_0} \cdot \vec{u}$$

ile hesaplanır.

**Not :** $z = f(x,y)$ nin $(D_u f)_{P_0}$ türevi :

1) $\vec{u}$ vektörü yönünde $P_0$ daki yönlü türev

2) $\vec{u}$ yönündeki $P_0$ daki artış hızı / oranı

3) $\vec{u}$ yönündeki $P_0$ daki azalış hızı / oranı

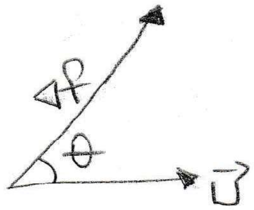
4) $\vec{u}$ yönündeki $P_0$ daki değişim oranı

anlamlarına gelir.

**Yönlü Türevin Özellikleri :**

$$D_u f = \nabla f \cdot \vec{u}$$

$$D_u f = \nabla f \cdot \vec{u} = |\nabla f| \cdot |\vec{u}| \cdot \cos\theta$$
$$= |\nabla f| \cdot \cos\theta$$




1) $\cos\theta = 1$ yani $\theta = 0$ olduğunda f fonksiyonu en hızlı şekilde artar. Yani en büyük yönlü türev değerine ulaşılır. $\vec{u}$ ile $\nabla f$ aynı yöndedir. Yani, f en çok P deki gradyent vektörü yönünde artar. Bu yöndeki türev,

$$D_u f = |\nabla f| \cdot \cos\theta = |\nabla f|$$

dir.

2) Benzer şekilde, f en fazla $-\nabla f$ yönünde azalır. ($\theta = 180°$) Bu yöndeki türev :

$$D_u f = |\nabla f| \cdot \cos\pi = -|\nabla f|$$

3) $\nabla f \neq 0$ gradyenine dik olan herhangi bir $\vec{u}$ yönü f deki sıfır değişimin yönüdür. Çünkü $\theta = \frac{\pi}{2}$ dir ve $D_u f = |\nabla f| \cdot \cos\frac{\pi}{2} = 0$ dır.

**Örnek:** $f(x,y) = \frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2}$ nin aşağıdaki durumlarda yönünü bulun.

a) $(1,1)$ noktasında en çok artan

b) $(1,1)$ noktasında en çok azalan

c) $(1,1)$ noktasında $f$ deki sıfır değişimin yönleri nedir?

$\nabla f = x\vec{i} + y\vec{j} \qquad \nabla f_{(1,1)} = \vec{i} + \vec{j}$

a) $\vec{u}$ ile $\nabla f$ aynı yöndedir.

$$\vec{u} = \frac{\vec{i}}{\sqrt{2}} + \frac{\vec{j}}{\sqrt{2}} = \left\langle \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}} \right\rangle$$

b) $\vec{u}$ ile $\nabla f$ ters yönlüdür.

$$\vec{u} = -\frac{\vec{i} + \vec{j}}{\sqrt{2}} = -\frac{1}{\sqrt{2}}\vec{i} - \frac{1}{\sqrt{2}}\vec{j} = \left\langle -\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}} \right\rangle$$

c) $\vec{u} \perp \nabla f \quad , \quad \vec{u} = a\vec{i} + b\vec{j} \qquad \nabla f = \vec{i} + \vec{j}$

$\Downarrow$

$\vec{u} \cdot \nabla f = 0$

$\langle a, b \rangle \langle 1, 1 \rangle = 0$

$a + b = 0 \Rightarrow \boxed{a = -b}$

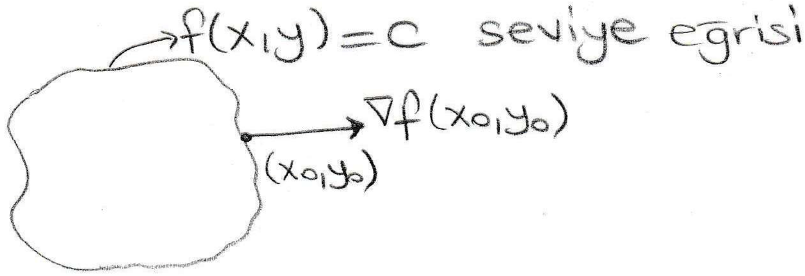
$a = 1 \Rightarrow b = -1$

$a = -1 \Rightarrow b = 1$

$$\vec{u}_1 = \frac{\vec{i}}{\sqrt{2}} - \frac{\vec{j}}{\sqrt{2}} = \left\langle \frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}} \right\rangle$$

$$\vec{u}_2 = \frac{-\vec{i}}{\sqrt{2}} + \frac{\vec{j}}{\sqrt{2}} = \left\langle -\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}} \right\rangle$$

* $f(x,y)$ türevlenebilir fonksiyonunun tanım kümesinin her $(x_0,y_0)$ noktasında, $f$ in gradyent vektörü $\nabla f$, $(x_0,y_0)$ da seviye eğrisine normaldir.




İspatı: $f(x,y)$ fonksiyonu $\vec{r}=g(t)\vec{i}+h(t)\vec{j}$ eğrisi boyunca sabit değer alıyorsa,

$$f(g(t),h(t))=c$$

dir. $f \to x,y \to t$

$t$ ye göre türev alınırsa,

$$\frac{\partial f}{\partial x}\cdot\underbrace{\frac{dx}{dt}}_{g'(t)}+\frac{\partial f}{\partial y}\cdot\underbrace{\frac{dy}{dt}}_{h'(t)}=0$$

$$\left\langle\frac{\partial f}{\partial x},\frac{\partial f}{\partial y}\right\rangle\cdot\left\langle g'(t),h'(t)\right\rangle=0$$

$$\downarrow$$

$$\nabla f\cdot\underbrace{\vec{r}\,'(t)}_{\text{teğet}}=0 \Rightarrow \underbrace{\nabla f}_{\text{normal}}\perp\underbrace{\vec{r}\,'(t)}_{\text{teğet}}$$

$\nabla f \to$ eğriye normaldir.

## Gradyenler için Cebirsel Kurallar :

1) $\nabla(f \mp g) = \nabla f \mp \nabla g$

2) $\nabla(f \cdot g) = g \cdot \nabla f + f \cdot \nabla g$

3) $\nabla\left(\frac{f}{g}\right) = \frac{g \cdot \nabla f - f \cdot \nabla g}{g^2}$

## Üç Değişkenli Fonksiyonlarda Yönlü Türev :

Türevlenebilir bir $f(x,y,z)$ fonksiyonu ve $\vec{u} = u_1\vec{i} + u_2\vec{j} + u_3\vec{k}$ birim vektörü için :

$$\nabla f = \frac{\partial f}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial f}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial f}{\partial z}\vec{k}$$

$$D_u f = \nabla f \cdot \vec{u} = \frac{\partial f}{\partial x} \cdot u_1 + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot u_2 + \frac{\partial f}{\partial z} \cdot u_3$$

* Daha önce iki değişkenli fonksiyonlar için belirttiğimiz kurallar 3-değişkenli fonksiyonlar için de geçerlidir.

Örnek: $f(x,y,z) = x^3 - xy^2 - z$ in $P_0(1,1,0)$ noktasında $\vec{v} = 2\vec{i} - 3\vec{j} + 6\vec{k}$ yönündeki türevi bulunuz.

$f$ en hızlı olarak $P_0$ da hangi yönde değişir? Bu yöndeki değişim oranı nedir?

$$\vec{u} = \frac{\vec{v}}{|\vec{v}|} = \frac{\langle 2,-3,6\rangle}{\sqrt{4+9+36}} = \frac{2}{7}\vec{i} - \frac{3}{7}\vec{j} + \frac{6}{7}\vec{k}$$

$$\nabla f = (3x^2 - y^2)\vec{i} - 2xy\vec{j} - \vec{k}$$

$$\nabla f_{(1,1,0)} = 2\vec{i} - 2\vec{j} - \vec{k}$$

$$(D_u f)_{P_0} = \vec{u} \cdot \nabla f\big|_{P_0} = \left\langle \frac{2}{7}, \frac{-3}{7}, \frac{6}{7} \right\rangle \cdot \langle 2,-2,-1\rangle$$

$$= \frac{4}{7} + \frac{6}{7} - \frac{6}{7} = \frac{4}{7}$$

Fonksiyon en hızlı $\nabla f = 2\vec{i} - 2\vec{j} - \vec{k}$ yönünde artar

" $-\nabla f$ yönünde azalır.

Bu yönlerde değişim oranları:

$$|\nabla f| = \sqrt{2^2+2^2+1^2} = 3 \qquad -|\nabla f| = -3$$