~ PARAMETRİK DENKLEMLER ~

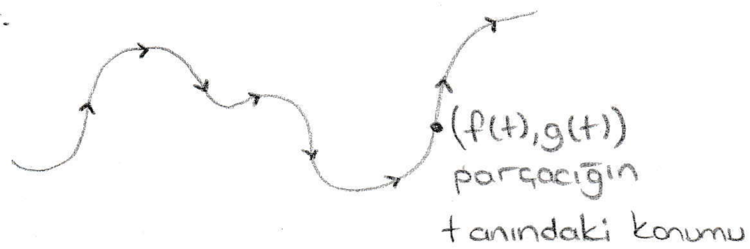
Eğer x ve y, $x=f(t)$ ve $y=g(t)$ $(t\in I)$ şeklinde tanımlanmış fonksiyonlar ise o zaman bu denklemler ile tanımlanan $(x,y)=(f(t),g(t))$ noktalar kümesi bir parametrik eğridir. Bu denklemlere eğrinin "parametrik denklemleri" denir.

$t \rightarrow$ eğri için bir parametre

$I \rightarrow$ parametre aralığı

Eğer $I=[a,b]$, yani $a\leq t\leq b$ ise eğrinin başlangıç noktası $(f(a),g(a))$ bitiş noktası $(f(b),g(b))$ olur.

Aralıkla birlikte, denklemlere eğrinin bir parametrizasyonu denir.



xy-düzleminde hareket eden bir parçacığın bıraktığı iz her zaman bir fonksiyonun veya tek bir denklemin grafiği değildir.

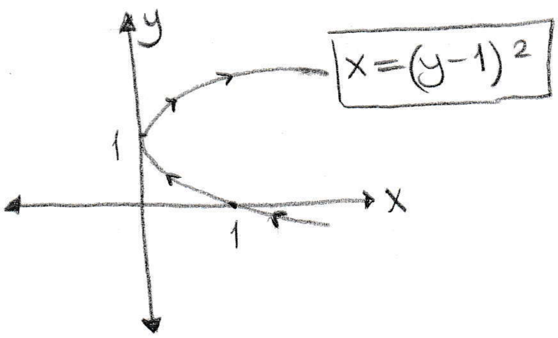
* Bir eğrinin birden fazla parametrizasyonu vardır.

Örnek: $x=t^2$, $y=t+1$ $-\infty<t<\infty$ eğrisinin denklemini x,y cinsinden bulup çiziniz.

$y=t+1 \Rightarrow t=y-1 \Rightarrow x=t^2=(y-1)^2$

$t\rightarrow-\infty \Rightarrow x\rightarrow\infty,\ y\rightarrow-\infty$

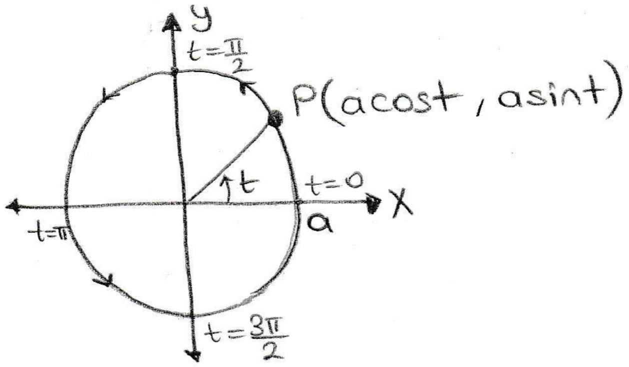
$t\rightarrow\infty \Rightarrow x\rightarrow\infty,\ y\rightarrow\infty$



Örnek: $x = a\cos t$, $y = a\sin t$, $0 \le t \le 2\pi$ parametrik denklemin grafiğini çiziniz.

$x^2 + y^2 = a^2\cos^2 t + a^2\sin^2 t = a^2 \rightarrow$ a yarıçaplı merkezil çember

$$\left.\begin{array}{l} t=0 \Rightarrow x=a,\ y=0 \\ t=2\pi \Rightarrow x=a,\ y=0 \end{array}\right]$$



$x = a\cos t$ ve $y = a\sin t$ denklemleri $x^2+y^2=a^2$ çemberi üzerindeki hareketi tanımlar.

Örnek: $x = 1 + 2\cos t$, $y = 2\sin t$ parametrizasyonu ile verilen eğriyi bulun.

$$\left.\begin{array}{ll} x = 1 + 2\cos t \Rightarrow & \cos t = \dfrac{x-1}{2} \\ y = 2\sin t & \sin t = \dfrac{y}{2} \end{array}\right] \quad \cos^2 t + \sin^2 t = \frac{(x-1)^2}{4} + \frac{y^2}{4} = 1$$

$\Rightarrow (x-1)^2 + y^2 = 4$ çemberi.

Türev; f ve g fonksiyonları t de türevlenebilir ise $x = f(t)$ ve $y = g(t)$ de türevlenebilirdir. Bu durumda:

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{g'(t)}{f'(t)} \quad (f'(t) \neq 0)$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{\frac{dy'}{dt}}{\frac{dx}{dt}}$$

Örnek: $x=\sec t$, $y=\tan t$, $-\frac{\pi}{2}<t<\frac{\pi}{2}$ eğrisinin $(\sqrt{2},1)$ noktasındaki teğetinin denklemini bulunuz.

$y=f(x)$ in (a,b) noktasındaki teğeti : $y-b=f'(a)(x-a)$

$$(a,b)=(\sqrt{2},1) \Rightarrow \left.\begin{aligned} \sqrt{2}&=\sec t \\ 1&=\tan t \end{aligned}\right] \underline{t=\frac{\pi}{4}}$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\frac{\sec^2 t}{\sec t.\tan t}=\frac{\sec t}{\tan t} \Rightarrow \left.\frac{dy}{dx}\right|_{t=\frac{\pi}{4}}=f'(\sqrt{2})=\sqrt{2} \;//$$

Teğet denklemi : $y-1=\sqrt{2}(x-\sqrt{2}) \Rightarrow \underline{y=\sqrt{2}x-1}$ //

Örnek:

$x=t-t^2$, $y=t-t^3 \Rightarrow \frac{d^2y}{dx^2}$ türevini t cinsinden bulun.

$$y'=\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\frac{1-3t^2}{1-2t}$$

$$y''=\frac{\frac{dy'}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\frac{\frac{-6.(1-2t)+2(1-3t^2)}{(1-2t)^2}}{1-2t}$$

$$=\frac{6t^2-6t+2}{(1-2t)^3}$$

//

Parametrik Olarak Tanımlı Eğrinin Uzunluğu ;

Eğer C eğrisi $x=f(t)$ ve $y=g(t)$, $a\leq t\leq b$ ile parametrik olarak tanımlanıyorsa ve $t=a$'dan $t=b$'ye artarken C eğrisi üzerinden sadece bir kez geçiliyorsa C nin uzunluğu

$$\boxed{L=\int_a^b \sqrt{(f'(t))^2+(g'(t))^2}\,dt}$$

dir.

Örnek; $x=r\cos t$, $y=r\sin t$, $0\leq t\leq 2\pi$ çemberinin uzunluğunu hesaplayın.

$$f'(t)=-r\sin t \Rightarrow (f'(t))^2=r^2\sin^2 t$$

$$g'(t)=r\cos t \Rightarrow (g'(t))^2=r^2\cos^2 t$$

$$(f'(t))^2+(g'(t))^2=r^2$$

$$L=\int_0^{2\pi}\sqrt{r^2}\,dt=rt\Big|_0^{2\pi}=2\pi r \text{ br.} \;//$$